

Introduction Design Internal Combustion Engine Piston, Connecting Rod and Crankshaft (by jasf1961)

Los fabricantes de motores y/o automóviles (BMW, Mercedes, etc.) se basan en la experiencia previa.

Cuando no disponemos de ella, nuestro caso, recurrimos a la teoría e intuición.

Los modelos cerodimensionales (sin CAD previo) reflejan con cierta aproximación rendimiento, potencia, etc.

Se trata, por tanto, de diseñar un motor teóricamente, apoyándonos en ciertos datos experimentales conocidos:

- **El rendimiento volumétrico** influye en la potencia. Este parámetro puede influir en un $\approx +10\%$ ó $\approx -10\%$.
- **Duración (grados) de la combustión.** Depende, además de otros factores, de la bomba de inyección (presión de inyección, geometría de los inyectores,..), afectando a la presión del gas en el cilindro durante el ciclo, y por tanto, a las fuerzas instantáneas que se ejercen. Deberíamos intentar centrarla en torno a $\varphi = 420^\circ = 60^\circ$ porque cuando

(para $\lambda = R_{ma}/L_{bi} = 0.20$, $\varphi \approx 80^\circ$ es el ángulo del cigüeñal en el que la biela está perpendicular a la manivela \equiv **Ideal**)

Esto se consigue, en cierta medida, adelantando/retrasando la inyección y aumentando/disminuyendo la presión de inyección de la bomba, **pero debido a la inercia del gas se retrasará y aumentará la duración (los grados de inyección) al aumentar las revoluciones del motor [ω (rd/s) \equiv n (rpm)].**

- **El flujo de energía calorífica** a través de las paredes del cilindro se modela por convección, conducción y **radiación (que suele despreciarse porque al depender de la cuarta potencia de la temperatura es proclive a grandes errores de cálculo)**. Su influencia en el ciclo no es determinante, dado que el calor que no se pierde a través de las paredes, se pierde por el tubo de escape, variando poco el flujo total de calor.
- **Las pérdidas** debidas a elementos auxiliares (alternador, bomba de agua, etc.), y fugas se estiman con un porcentaje.
- **Las pérdidas** debidas a rozamientos entre pistón y camisa se estiman en función del $\mu_{\text{Kinetic friction}}$ y la fuerza normal.

Siendo conscientes de estas limitaciones (que mantendremos paramétricamente constantes), analizaremos la influencia de otras variables como las inercias, en especial **la Inercia de la Biela**, cuyo estudio es complejo.

1 – Input Parameters

- CxHy Fuel Type
- Nc Number of Cylinders
- Vdt Cubic Capacity Engine
- Rc Compression Ratio
- RDC Relation Bore/Stroke
- λ Relation CrankArm/ConnectingRod
- n Angular Velocity (rpm)
- Fr Fuel Ratio
- Etc.

Introducción de Datos

- Tipo de Combustible
- Nº de Cilindros
- Cilindrada del Motor
- Relación de Compresión
- Relación Diámetro/Carrera del Pistón $RDC = Dp/Cp$
- Relación RadioManivela/LongitudBiela $\lambda = Rma/Lbi$
- Velocidad Angular (rpm)
- Dosado (Ratio Combustible/Aire)

2 –Main Parameters Calculation

- Vd Cubic Capacity Cylinder
- Vcc Cubic Capacity Combustion Chamber
- Vtc Cubic Capacity Total Cylinder
- Dp Cylinder Bore Diameter
- Cp Stroke
- Rma Crank Arm Radius
- Lbi Connecting Rod Longitude
- Cm Piston Average Velocity
- η_{efec} Effective Performance
- Pme Effective Average Pressure
- PMe Effective Torque
- gsfc Specific Consumption
- Etc.

Cálculo de los Parámetros Principales

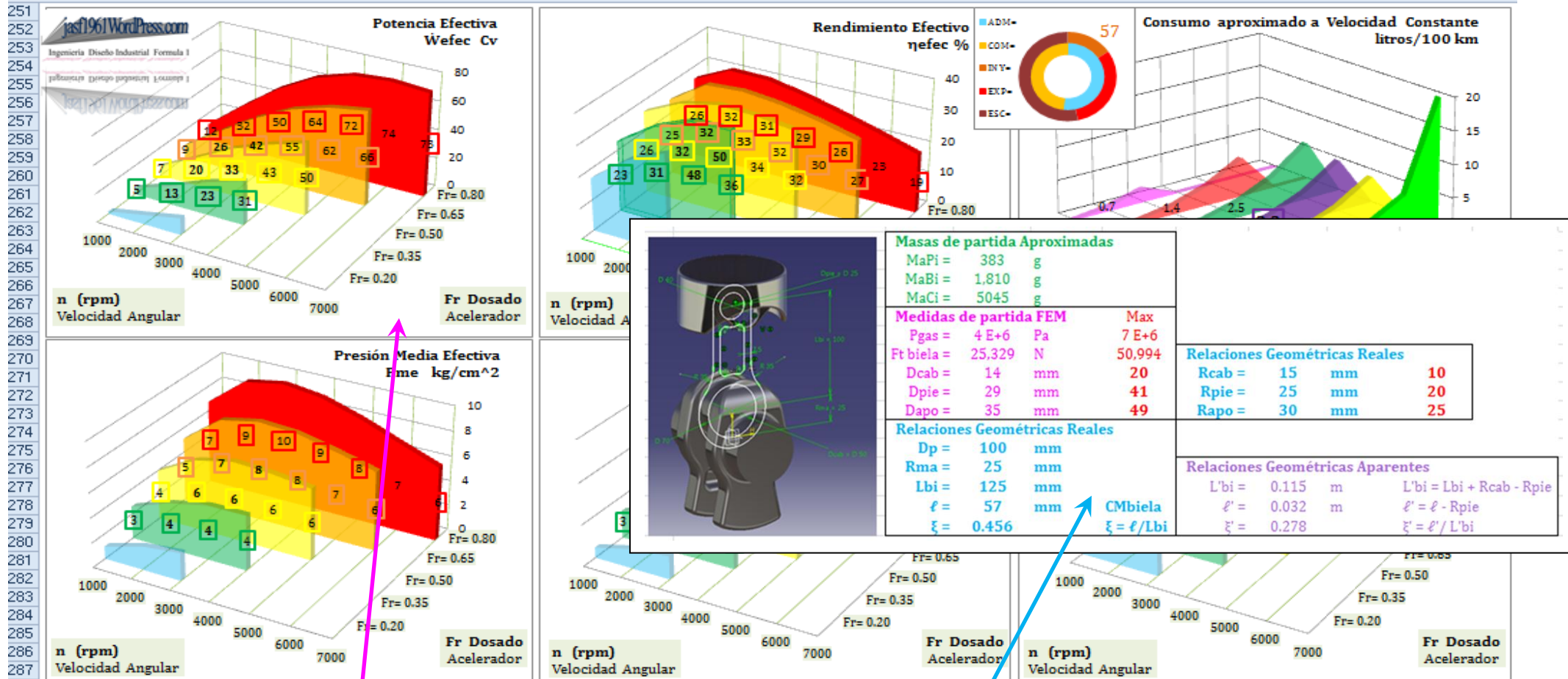
- Cilindrada Unitaria $Vd = VdT/Nc$
- Volumen Cámara de Combustión $Vcc = Vd/(Rc-1)$
- Volumen Total del Cilindro $Vtc = Vd+Vcc$
- Diámetro del Pistón (Diámetro Interior del Cilindro)
- Carrera del Pistón
- Radio de la Manivela
- Longitud de la Biela
- Velocidad Media del Pistón
- Rendimiento Efectivo
- Presión Media Efectiva
- Par Motor Efectivo
- Consumo Específico

La Selección
española
vuelve
a casa



Por ejemplo, para calcular el motor de un turismo de 4 cilindros y 1570 cm³ n = 3000 rpm, etc. tenemos:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P		
244	Datos	Combustible	Gasolina	C8 H18	Pcg (J/kg)	47 E+6	Resultados			Iterando (pulsa Calcular = F9) para Dosar								
245	Nº de Cilindros	4	Turbo	Compresor	Iteración	30	Wtur/Wind	5%	Pa / Po	1.10	Qref	-43%	Wefec Cv	50	Twall (°K)	12	ℓ/hora	
246	Cilindrada (c.c.)	1570	Rtg	33%	Contador	30	Wcom/Wind	0%	pa / po	1.09	Qesc	-24%	Pme kcf/cm²	10	máxima	1,277	media	571
247	Relac. Comp. Rc	10	Ψitc	50%	Acelerador	80%	η vol	95%	Ta / To	1.01	η term	34%	PMe kg m	12	Tgas (°K)	751	máxima	2,165
248	Relac. Dp/Cp	2.00	Compresor	Volumétrico	Dosado Fr	3000	Dp (mm)	100	Piny/(Pa*Re)	45	η ind	35%	gsfc g/Cv hora	179	media	751	máxima	2,165
249	λ=Rma/Lbi	0.20	Rvc	1.00	n	3000	Cp (mm)	50	Iny n°gi	57	η mec	91%	Wesp Cof/itera	32	máxima	2,165	media	571
250	Piny (Pa)	50 E+6	Ψic	50%	r.p.m.	3000	Cm (m/s)	5	Pérdidas	9%	η efec	31%						



Si damos por buenos estos resultados (Potencia \dot{W} , Rendimiento η , etc.), con las dimensiones Diámetro Pistón D_p , Longitud Biela L_{bi} , Radio Manivela R_{ma} , Diámetros de pie, cabeza (biela) y apoyo del cigüeñal y masas empezamos a diseñar en 3D.

3 - Design 3D Engine with CAD Software and Stress Analysis (FEM, FEA).

Suponemos que el cigüeñal gira a velocidad constante

n (rpm) ω (rd/s)

Necesitaremos conocer la fuerza (presión) que ejerce el gas en el cilindro,

F_{gas} (N)

Podemos imponer un par resistente en el cigüeñal (Par Motor Medio)

Par Re (Nm)

El software debería encargarse de calcular las inercias...

Tomamos de los cálculos en EXCEL (u otro software):

44,910	45,416	45,311	45,015	4,591	0.139	26,570	41,798	664	670	668
5,145	5,180	5,174	5,185	338	0.019	1,807	2,732	45	45	45
-952	-952	-952	-952	-1,056	0.000	-6,219	-3,316	-155	-156	-156
Gas Ideal	Van der Waals	Redlich / Kwong			13			Gas Ideal	Van der Waals	Redlich / Kwong
Fpist Total	Fpist Total	Fpist Total	Ft bie	Fn cilin	W rozam	Ft man	Fn man	ParCi	ParCi	ParCi
N	N	N	N	N	J	N	N	N m	N m	N m

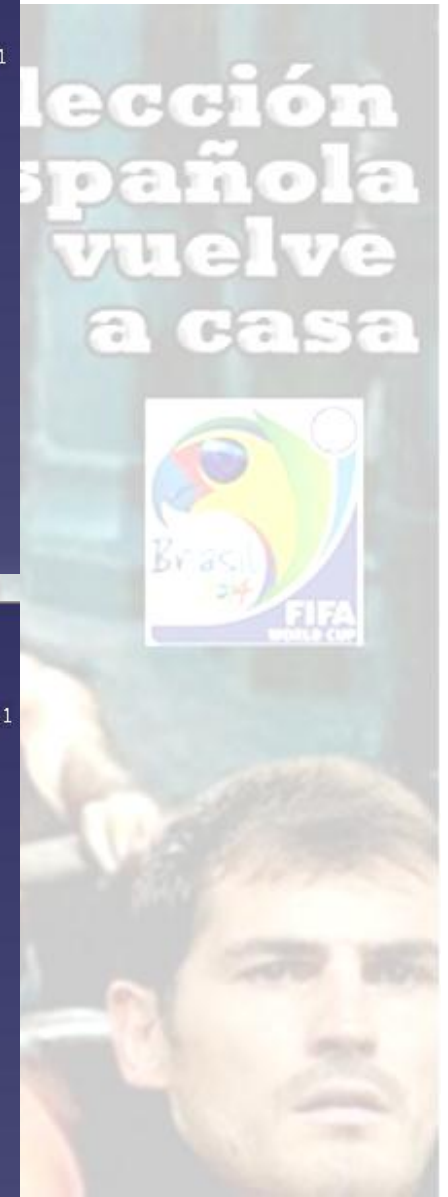
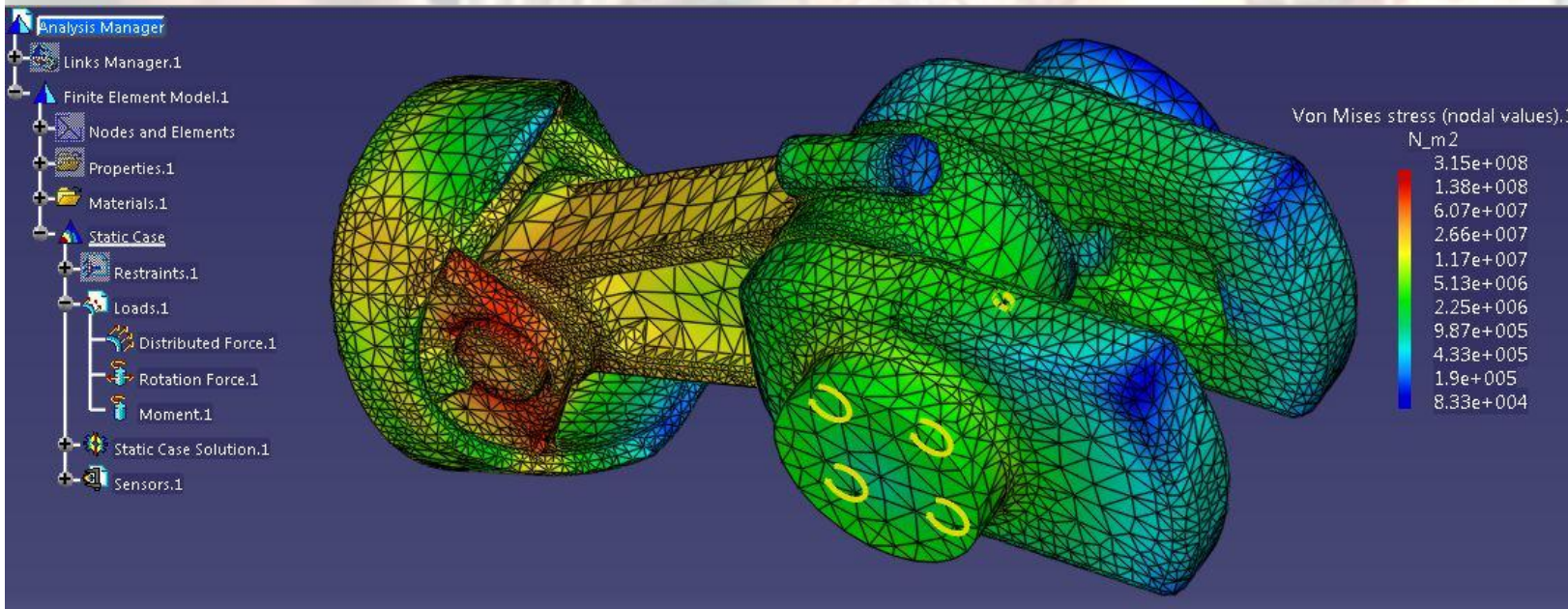
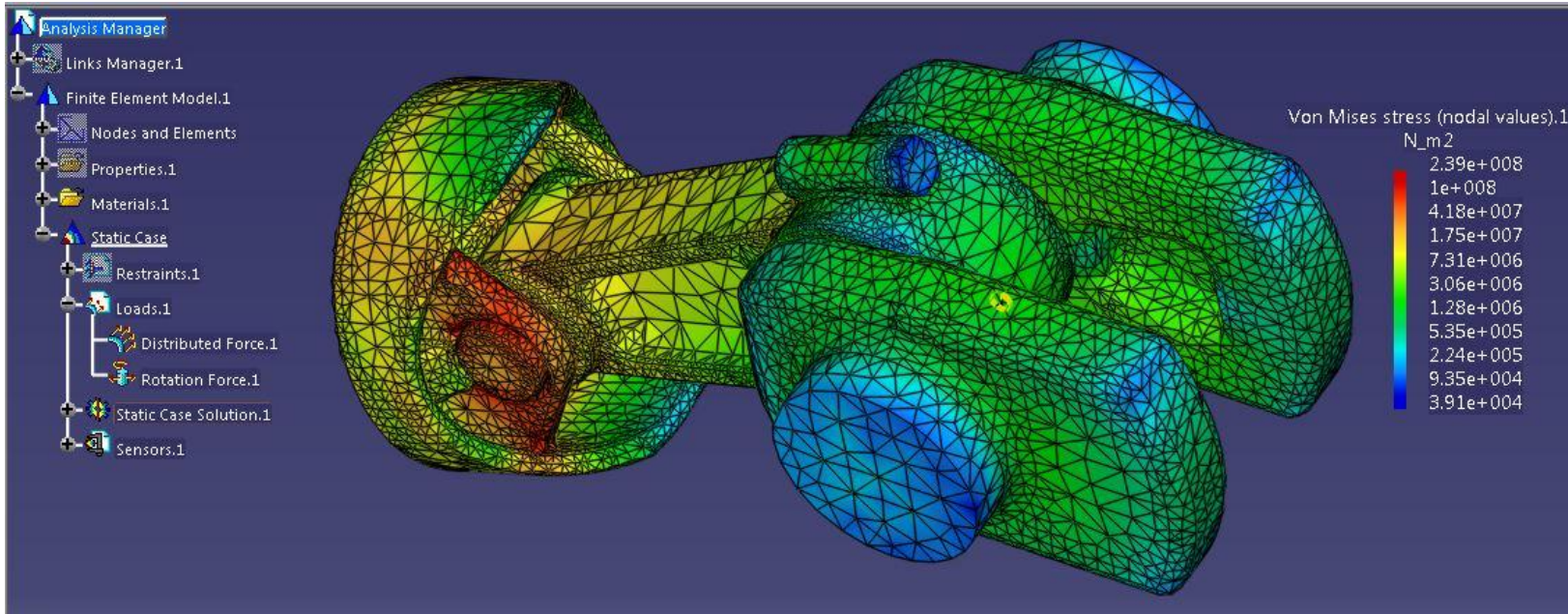
Fuerza Pistón Total Máxima ≈ 45000 N

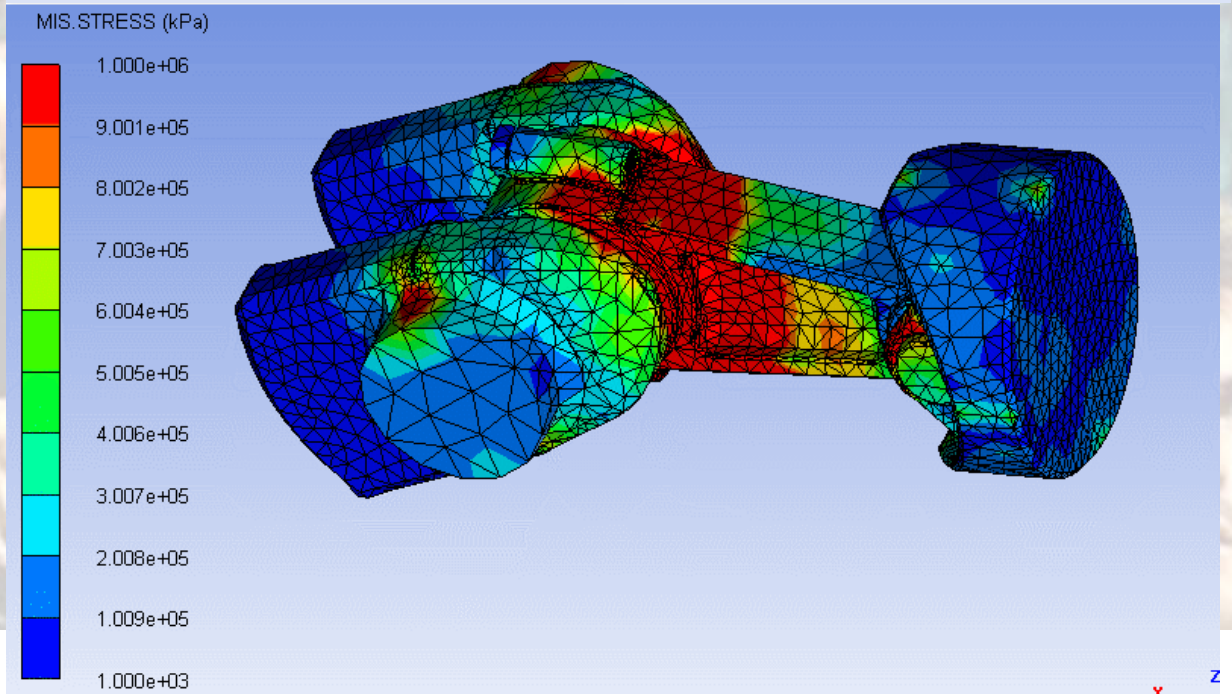
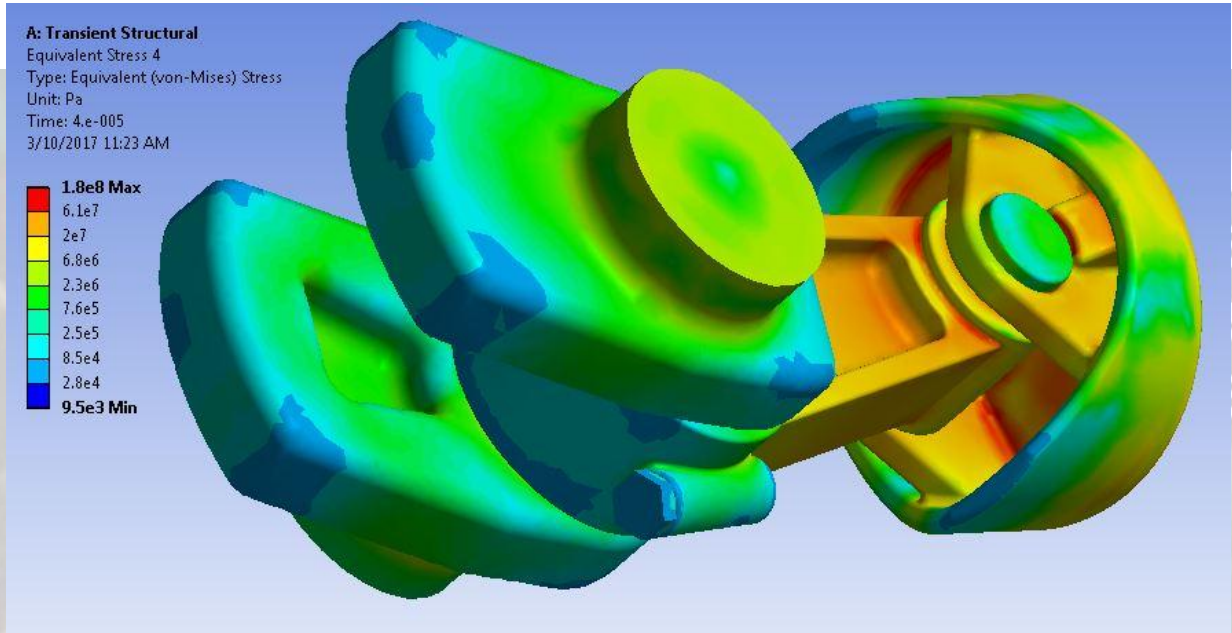
Par Motor Medio ≈ 180 Nm (45 * 4 cilindros = 180)

para cálculos en una posición determinada. Fuerza Pistón es máxima para un ángulo del cigüeñal de $\varphi \approx 380^\circ$ ($\varphi \approx 20^\circ$)

Si queremos simular todo el ciclo de 720° (2 vueltas), tendremos que tomar valores de la Fuerza Pistón, $F = f(\varphi)$

Una vez hecho el diseño 3D, para el conjunto Pistón-Biela-Cigüeñal, obtendremos Finite Element Analysis, FEA del tipo:

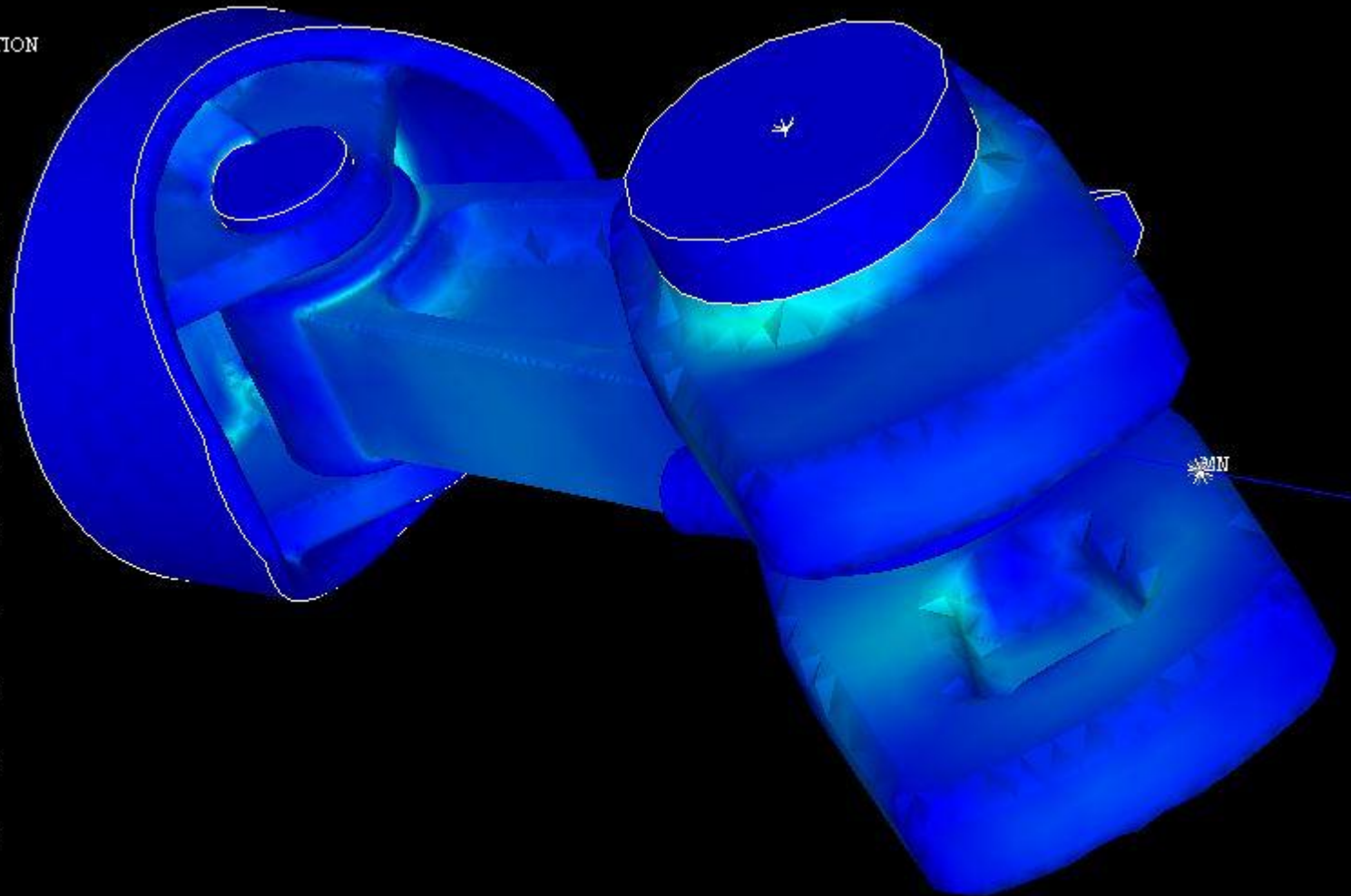




1

MAR 8 2017
16:28:06

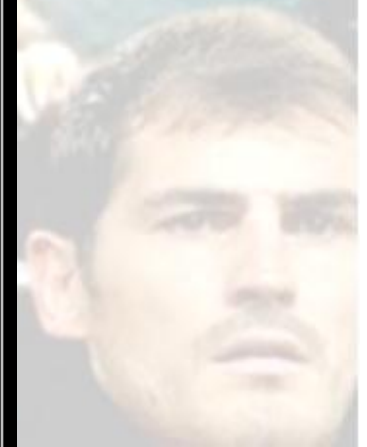
NODAL SOLUTION



STEP=4
SUB =9
TIME=.400E-03
SEQV (AVG)
DMX =.196E-03
SMN =8247.45

Cilindro-Transient (A5)

cción
añola
uelve
a casa



Ahora viene la parte más difícil: **¿ Who simulation is more realistic ?**

$$\sigma_{\max} \approx 1 \text{ E}+9 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{\min} \approx 1 \text{ E}+8 \text{ Pa}$$

En estos casos las diferencias tienen un ratio de $1 \text{ E}+9 / 1 \text{ E}+8 \approx 1000\%$
Como Tensile Yield Strength acero $\approx 2,5 \text{ E}+8 \text{ Pa}$ la situación es peliaguda.

En todos los casos vemos que la mayor parte de las piezas están por debajo de $2,5 \text{ E}+8 \text{ Pa}$ (zona segura) y es, en las mayores tensiones (concentración de tensiones), donde existen grandes discrepancias.

Tanto si hacemos la simulación de:

- cada pieza por separado hay que aplicar condiciones en las fuerzas y fijaciones,
- en conjunto hay que aplicar, además, condiciones en las conexiones (juntas de revolución),

las Condiciones de Frontera (Límites) **Boundary Conditions** van a desempeñar un papel fundamental.

También hay que fijarse en cómo y qué hace el software para obtener las soluciones, ya que tienen varias formas de aproximarlas (algoritmos de Gauss, Newton- Raphson , etc.) y en algunos casos los resultados son bastante diferentes.

Todo ello dejando que el software configure, por defecto, la mayoría de las opciones de la resolución del problema. Si empezamos a cambiar dichas opciones los resultados pueden parecerse como el día y la noche.

Para el motor de un turismo, con $n \leq 6.000 \text{ rpm}$ las inercias son pequeñas con un ratio $F_{\text{gas}} / F_{\text{inercia}} \approx 10$
Para un Fórmula 1 del 2012 con $n \leq 18.000 \text{ rpm}$ las inercias tienen un ratio $F_{\text{gas}} / F_{\text{inercia}} \approx 2$

Aunque, en ambos casos, hay que equilibrar el motor, y los cigüeñales en especial, para evitar vibraciones, en el caso de un turismo las inercias no deberían destruir el motor, pero en el caso del F1-2012 lo destruirán por muy equilibrado que esté.

En ambos casos la Fuerza del gas máxima es del orden de	turismo	70.000 N	80.000 N	F1
mientras que las Fuerzas Inerciales son del orden de	turismo	7.000 N	-36.000 N	F1

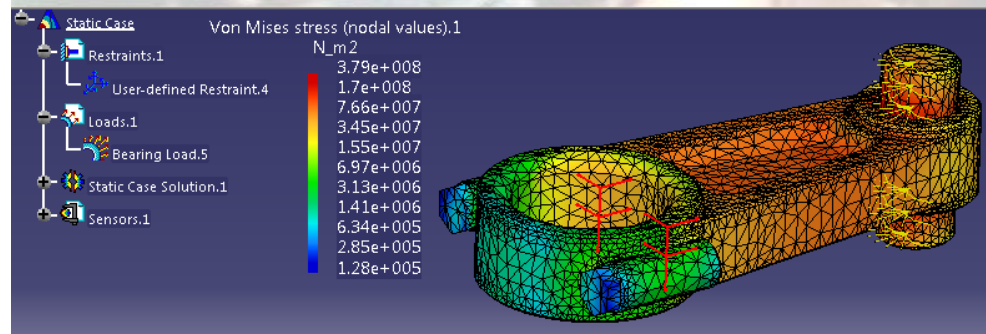
Nótese, que F_{gas} actúa brevemente en su intensidad máxima $(10-20)^\circ$ de giro del cigüeñal de los 720° mientras que $F_{inercia}$ en un Fórmula 1 varía entre $+25.000\text{ N}$ y -36.000 N varias veces en los 720° .
Dicho de otra forma:

- en un turismo podremos sobredimensionar las piezas, por seguridad (a mayor masa mayor inercia, pero No Problem)
- en un F1 ocurre lo contrario, a 18.000 rpm las secciones deben ser las mínimas que aguanten los 80.000 N , i.e., ya que de lo contrario, las inercias se encargarán de destruirlo (e.g., sobredimensionar la biela puede romper el cigüeñal).

En el caso de vehículos deportivos con revoluciones del orden de $n \leq 12.000\text{ rpm}$ la situación es similar pero se han de diseñar para que aguanten, 300.000 km p.e., mientras que un F1 basta con que dure 5.000 km (5 Grandes Premios).

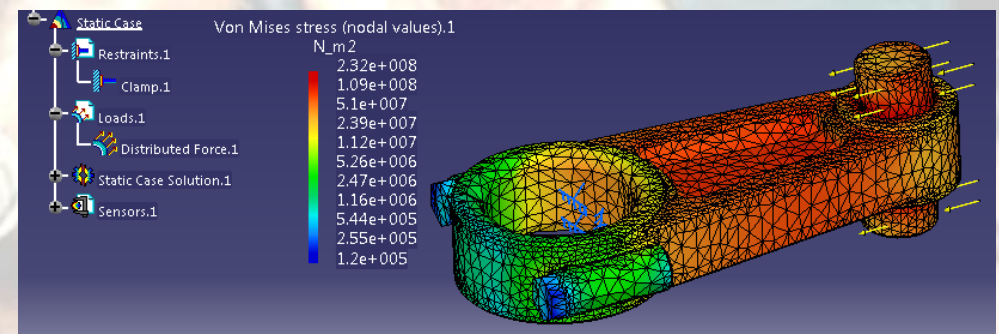
300.000 km a 100 km/h a 3.000 rpm $\equiv 3 \cdot 10^5 / 10^2 \cdot 60 \cdot 3 \cdot 10^3\text{ rev} \equiv 5,4 \cdot 10^8\text{ ciclos}$ (para cálculo a fatiga)
 5.000 km a 200 km/h a 18.000 rpm $\equiv 5 \cdot 10^3 / 2 \cdot 10^2 \cdot 60 \cdot 18 \cdot 10^3\text{ rev} \equiv 2,7 \cdot 10^7\text{ ciclos}$ (para cálculo a fatiga)

Parece razonable, al diseñar el motor de un turismo, hacerlo con cada pieza por separado, sin tener demasiado en cuenta las inercias: diseñarlo **estáticamente** poniendo **especial énfasis en las condiciones de contorno**. Ejemplo, si $F = 70.000\text{ N}$



a) Bearing load = 70.000 N

$\sigma_{\text{máx}} = 3,79\text{ e}+8\text{ Pa}$



b) Distributed Force = 70.000 N

$\sigma_{\text{máx}} = 2,32\text{ e}+8\text{ Pa}$

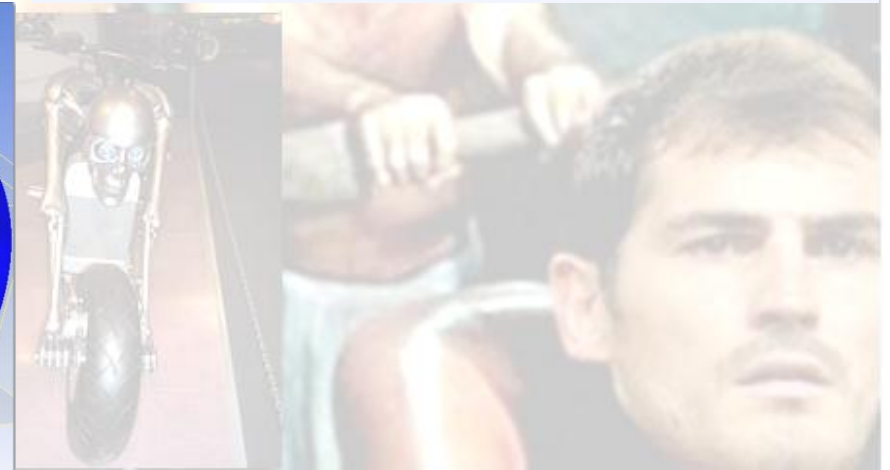
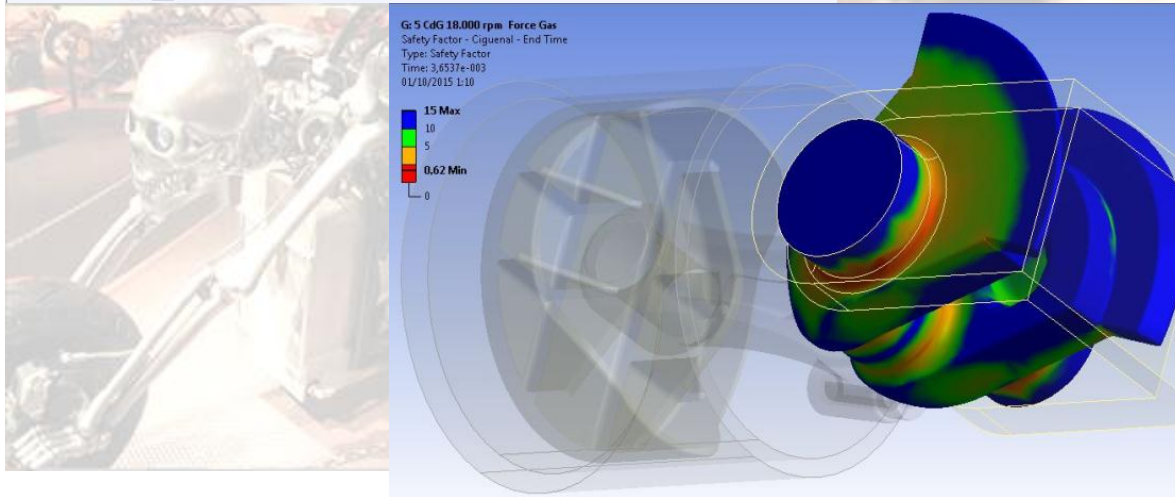
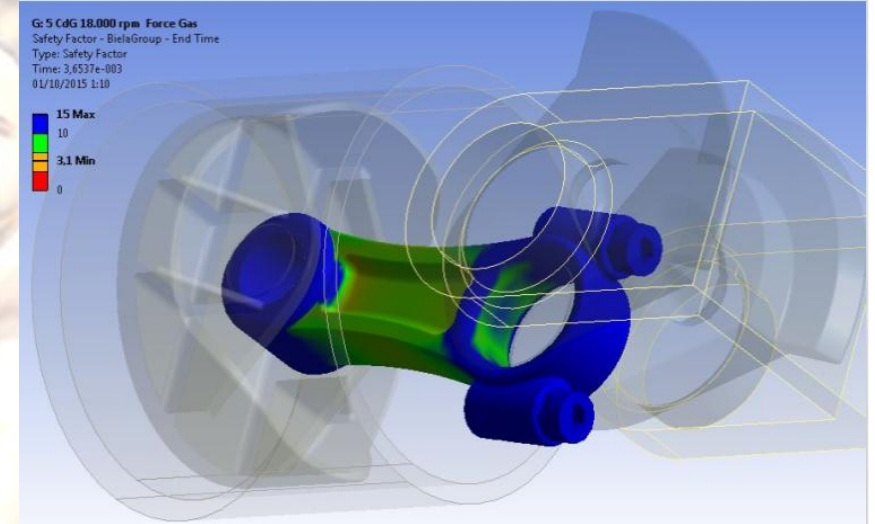
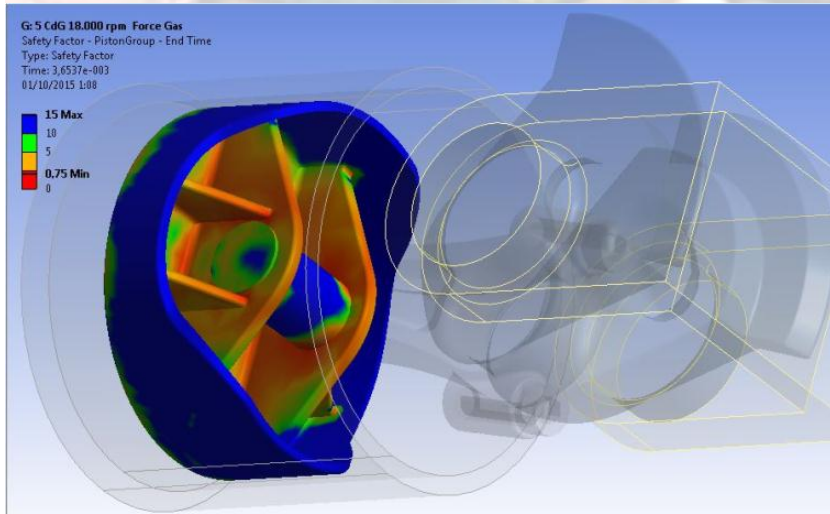
Estas simulaciones tardan 1 s permitiendo hacer rápidas modificaciones en la pieza hasta satisfacer el diseño.

El software resuelve la ecuación de la estática

$$[K] \{x\} = \sum \{F^a\} \equiv [R] \{\delta\} = \sum \{F^a\} \quad (\text{rigidez y desplazamiento})$$

Resolver la ecuación más general $[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \sum \{F^a\}$ conlleva horas de computación

Para el F1 2012 el transient analysis tarda ≈ 2 horas para 48 estados cuasiestáticos (con $\Delta\varphi = 15^\circ$ $48 \times 15^\circ = 720^\circ$)



Al tener en cuenta amortiguación (damping) y aceleración (inercia) hay que acudir a la ecuación de la dinámica

$[M] \{a\} + [A] \{v\} + [R] \{\delta\} = \sum \{F^a\}$ Ecuación

$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \sum \{F^a\}$ Equation

$[M]$ = structural *mass* matrix **Masa**

$[C]$ = structural *damping* matrix **Amortiguación**

$[K]$ = structural *stiffness* matrix **Rigidez**

$\{\ddot{x}\}$ = nodal *acceleration* vector **aceleración**

$\{\dot{x}\}$ = nodal *velocity* vector **velocidad**

$\{x\}$ = nodal *displacement* vector **desplazamiento**

$\{F^a\}$ = applied *load* vector **Fuerza**

The transient dynamic equilibrium equation for a linear structure

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \sum \{F^a\}$$

The central difference method is used for **explicit transient analyses** *LS-DYNA*

The Newmark method and HHT method are used for **implicit transient analyses**. The Newmark method uses finite difference expansions in the **time interval Δt** .

The full solution method.

In a nonlinear analysis, the Newton-Raphson method is employed along with the Newmark assumptions.

Resolver esta ecuación para un cilindro (camisa + pistón + biela + cigüeñal + apoyos) a lo largo del ciclo de 720° como estados cuasiestáticos lleva horas de computación.

Por tanto deberíamos hacer la simulación cuando tengamos bien diseñada cada pieza por separado.

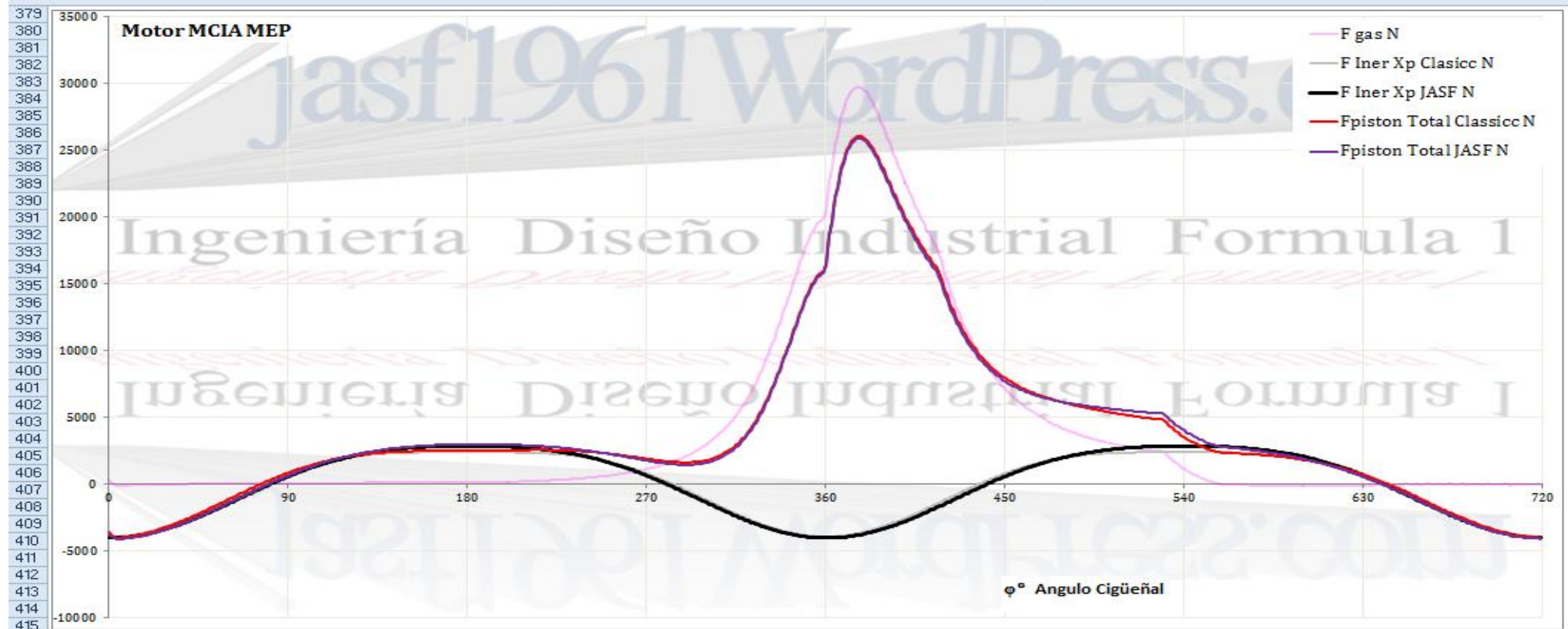
Aun así, tenemos que tener presente que resolvemos una estructura en movimiento con estados cuasiestáticos y con conexiones en las juntas de revolución (Boundary Conditions) difíciles de definir.

Por no mencionar otros aspectos vitales como el tipo de mallado, su resolución, the **time interval Δt** , etc, cuyos valores deben cumplir ciertos requisitos para que el software sea capaz de reflejar, con cierta precisión, la esencia del proceso y *sus resultados se asemejen a la realidad* (en caso contrario el estudio teórico poco ayuda).

En el gráfico adjunto, en este caso, se observa que la **Presión máxima** y **Fgas \equiv Fpis Expan** se producen a **$\phi \approx 380^\circ$**

el **Par máximo (ParCi)** a **$\phi \approx 400^\circ$** mientras que la Fuerza Inercial Classic tiene un máximo en **$\phi \approx 360^\circ$** y va disminuyendo.

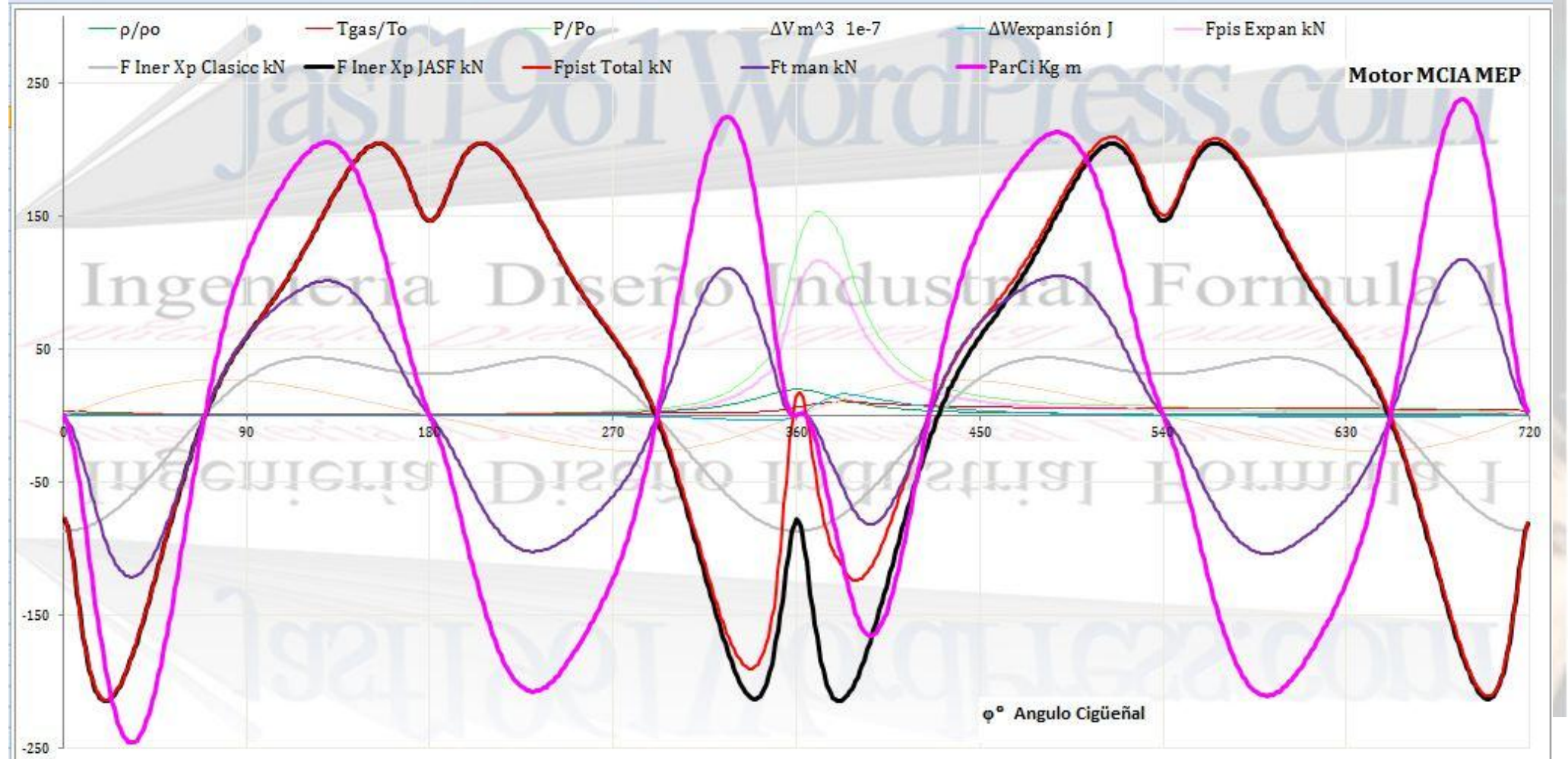
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
245	Nº de Cilindros	4	Turbo	Compresor	Iteración	30	Wtur/Wind	5%	Pa / Po	1.10	Qref	-43%	Wefec Cv	51	Twall (°K)	
246	Cilindrada (c.c.)	1570	Rtg	33%	Contador	30	Wcom/Wind	0%	pa / po	1.09	Qesc	-24%			media	571
247	Relac. Comp. Rc	10	Ψtc	50%	Acelerador		η vol	95%	Ta / To	1.01	η term	34%	Pme kg/cm²	10	máxima	1,277
248	Relac. Dp/Cp	2.00	Compresor	Volumétrico	Dosado Fr	80%	Dp (mm)	100	Piny/(Pa*Rc)	45	η ind	35%	PMe kg m	12	Tgas (°K)	
249	λ=Rma/Lbi	0.20	Rvc	1.00	n		Cp (mm)	50	Iny n°gi	57	η mec	92%	gsfc g/Cv hora	177	media	751
250	Piny (Pa)	50 E+6	Ψic	50%	r.p.m.	3000	Cm (m/s)	5	Pérdidas	8%	η efec	32%	Wesp Coefitras	32	máxima	2,165



Por tanto haciendo la simulación transient analysis (implicit o explicit) de estos **$\Delta\phi \approx 20^\circ$** debería ser suficiente para sacar la esencia del proceso ya que, en este intervalo, es dónde las fuerzas alcanzan valores elevados (stress máximo).

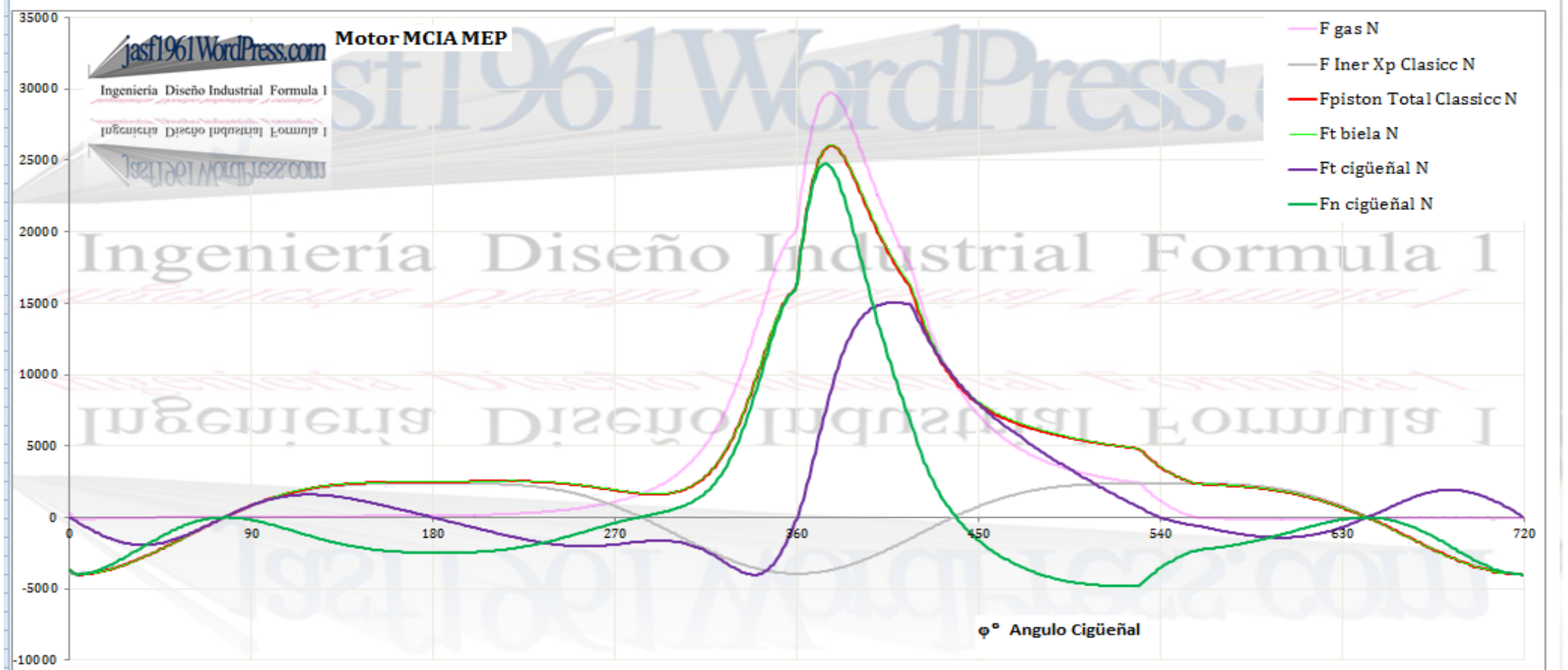
Si lo comparamos con el motor del F1 a 18.000 rpm vemos que en este caso las Fuerzas de Inercia juegan un rol muy importante durante todo el ciclo ya que además de su valor nominal alternan tracción y compresión

Datos	Combustible	Gasolina	C8 H18	Pcg (J/kg)	47 E+6	Resultados	Iterando (pulsa Calcular = F9)	para Dosados Fr y Velocidad Angular n rpm							
Nº de Cilindros	8	Turbo	Compresor	Iteración	70	Wtur/Wind	0%	Pa / Po	1.17	Qref	-9%	Wefec Cv	811	Twall (°K)	
Cilindrada (c.c.)	2400	Rtg	0%	Contador	70	Wcom/Wind	0%	pa / po	1.16	Qesc	-39%	Pme kg/cm²	17	media	758
Relac. Comp. Rc	15	Ψitc	50%	Acelerador	100%	η vol	114%	Ta / To	1.01	η term	52%	PMe kg m	32	máxima	1,803
Relac. Dp/Cp	2.47	Compresor	Volumétrico	Dosado Fr	100%	Dp (mm)	98	Piny/(Pa* Rc)	90	η ind	44%	gsfc g/cv hora	151	Tgas (°K)	
λ=Rma/Lbi	0.25	Rvc	1.00	n	18000	Cp (mm)	40	Iny n²gi	32	η mec	77%	Wesp Colitra	338	media	1,126
Piny (Pa)	160 E+6	Ψic	50%	r.p.m.	18000	Cm (m/s)	24	Pérdidas	23%	η efec	37%			máxima	3,216



Para un motor de turismo de 4 cilindros en línea podemos tomar como punto de diseño $\varphi \approx 380^\circ$:

Datos		Combustible	Gasolina	C8 H18	Pcg (J/kg)	47 E+6	Resultados		Iterando (pulsar Calcular = F9) para Dosac		Consumo kg/h	9	12	€/hora	
Nº de Cilindros	4	Turbo	Compresor	Iteración	30	Wtur/Wind	5%	Pa / Po	1.10	Qref	-43%	Wefec Cv	51	Twall (°K)	
Cilindrada (c.c.)	1570	Rtg	33%	Contador	30	Wcom/Wind	0%	pa / po	1.09	Qesc	-24%			media	571
Relac. Comp. Rc	10	Ψtc	50%	Acelerador	80%	η vol	95%	Ta / To	1.01	η term	34%	Pme kg/cm²	10	máxima	1,277
Relac. Dp/Cp	2.00	Compresor	Volumétrico	Dosado Fr	n	Dp (mm)	100	Piny/(Pa*Rc)	45	η ind	35%	PMe kg m	12	Tgas (°K)	
λ=Rma/Lbi	0.20	Rvc	1.00	n	3000	Cp (mm)	50	Iny n°gi	57	η mec	92%	gsfc g/cv hora	177	media	751
Piny (Pa)	50 E+6	Ψic	50%	r.p.m.		Cm (m/s)	5	Pérdidas	8%	η efec	32%	Wesp cv/litro	32	máxima	2,165



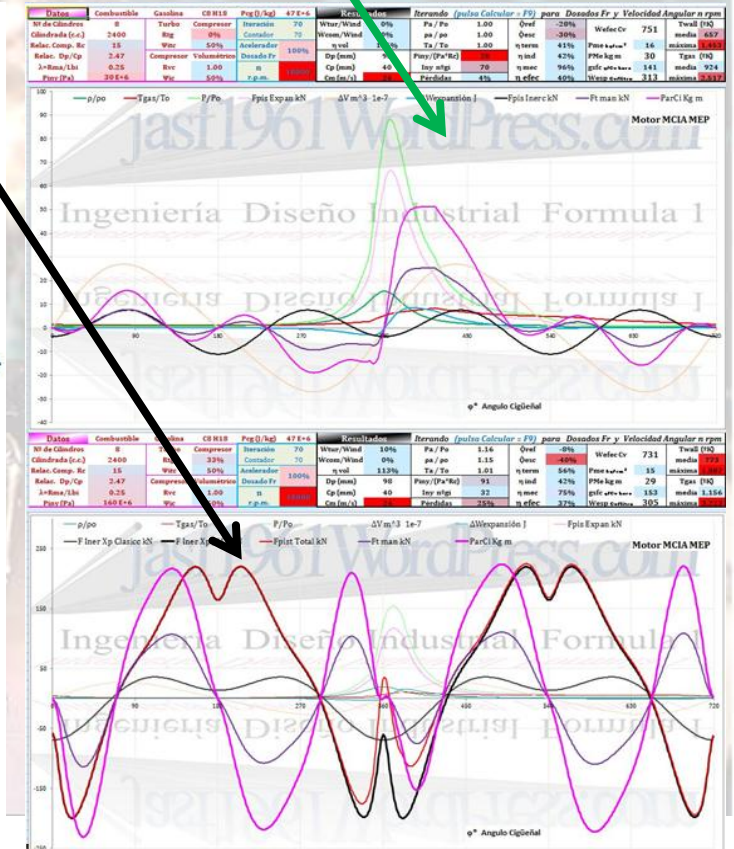
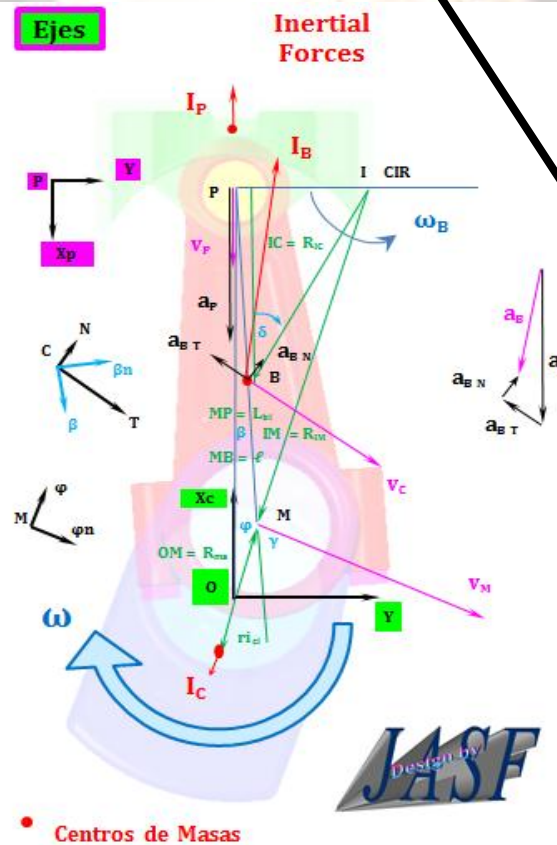
Al ser las inercias pequeñas podemos aplicar a pistón, biela y cigüeñal una fuerza de unos 45 kN, si bien para el cigüeñal podemos hacerlo en 2 instantes, i.e. $\varphi \approx 370^\circ$ y $\varphi \approx 400^\circ$ para evaluar las fuerzas normal y tangencial.

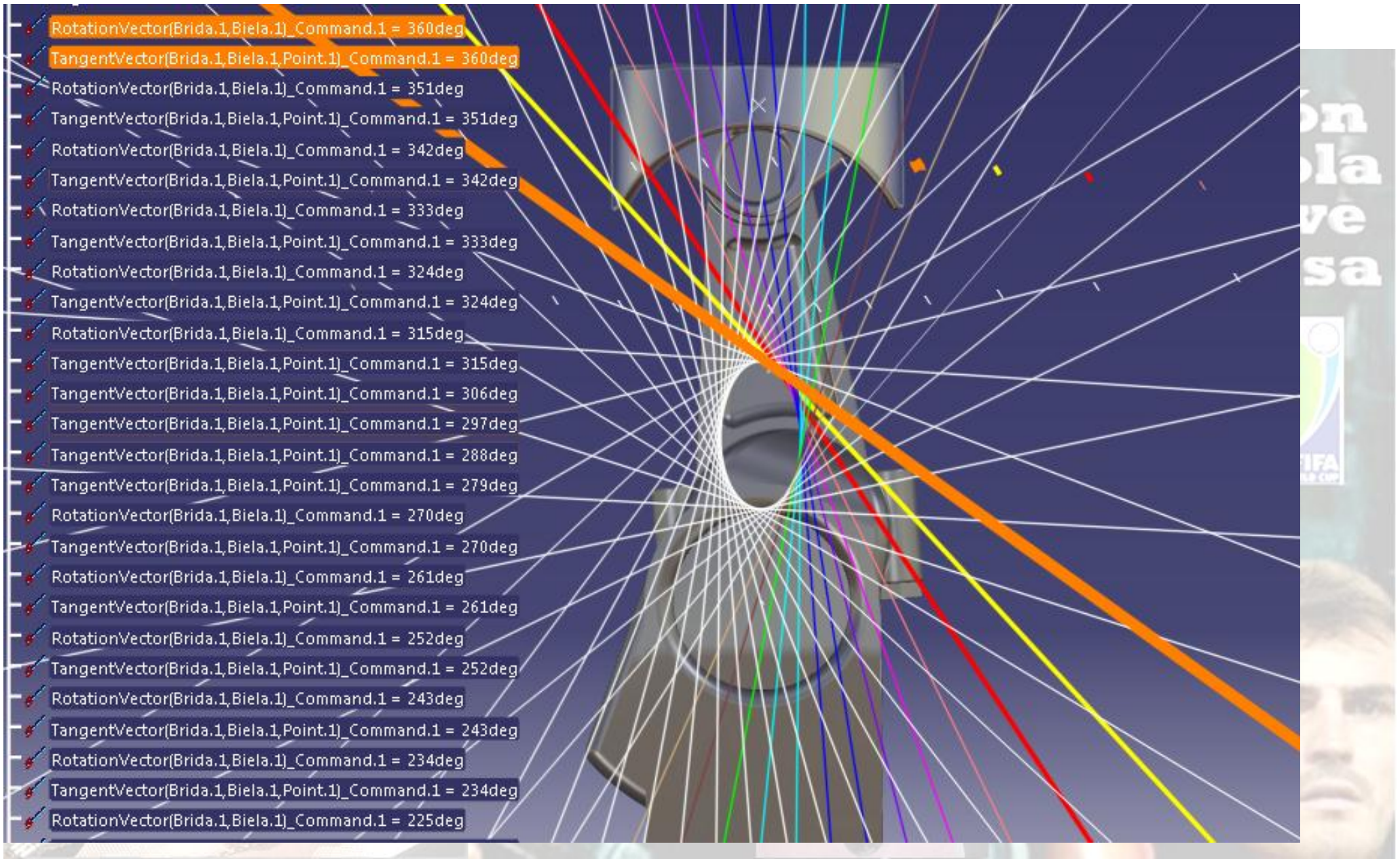
Comparativa de cálculos inerciales para un cilindro del motor de un F1 del 2012 V8 girando a 18.000 rpm:

- **Inercia clásica** (pistón **alternativa** y cigüeñal + 1/3 biela **centrífuga**)
- Teniendo en cuenta las inercias de cada pieza: pistón **alternativa**, cigüeñal **centrífuga** y biela que va cambiando su **Centro Instantáneo de Rotación CIR**, con aceleraciones **tangencial y normal**

Inercia de la Biela Connecting Rod Inertia

M, Manivela del Cigüeñal	$\omega = \text{cte}$ hipótesis	
$x_M = R_{ma} \cos \varphi$	$\varphi = \omega t$	
$y_M = R_{ma} \sin \varphi$		
$v_M = \omega \wedge R_{ma}$	$F_{Ici} = m_{ci} \omega^2 r_{ici}$	
P, Pistón	$\lambda = R_{ma}/L_{bi}$	
$x_p = R_{ma} (1 - \cos \varphi) + L_{bi} (1 - \cos \beta)$		$y_p = 0$
$v_p = \omega R_{ma} (\sin \varphi + \lambda/2 \sin 2\varphi) / (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$		
$a_p = \omega^2 R_{ma} (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi)$	$F_{Ipi} = m_{pi} a_p$	
I, CIR Centro Instantáneo de Rotación de la Biela		
$x_I = x_p$		
$y_I = x_p \operatorname{tg} \varphi$		
B, Centro de Gravedad de la Biela	$\xi = \ell/L_{bi}$ $\ell = MB$	
$x_B = x_M + \xi (x_p - x_M)$	$x_B = x_M + \xi (x_p - x_M)$	
$y_B = y_M - \xi y_M$	$y_B = y_M + \xi (y_p - y_M)$	$y_p = 0$
$R_{IM} = IM = ((x_M - x_I)^2 + (y_M - y_I)^2)^{1/2}$		
$R_{IB} = IB = ((x_B - x_I)^2 + (y_B - y_I)^2)^{1/2}$		
$\omega_B = -\operatorname{sig}(\cos \varphi) \omega R_{ma}/R_{IM}$	$\omega_B = -\omega \cos \varphi / (\lambda^2 - \sin^2 \varphi)^{1/2}$	
$v_B = \omega_B \wedge R_{IB}$	$\alpha_B = -\omega^2 \sin \varphi (\lambda^2 - 1) / (\lambda^2 - \sin^2 \varphi)^{3/2}$	
$a_{BN} = \omega_B^2 R_{IB}$	$I_{BN} = -m_{bi} a_{BN}$	
$F_{BNXp} = F_{BN} \cos \delta$	Centrifugal Force Connecting Rod	
$F_{BNY} = F_{BN} \sin \delta$		
$a_{BT} = \Delta v_c /\Delta t$	$I_{BT} = -m_{bi} a_{BT}$	
$F_{BTXp} = F_{BT} \sin \delta$	Tangential Force Connecting Rod	
$F_{BTY} = F_{BT} \cos \delta$		

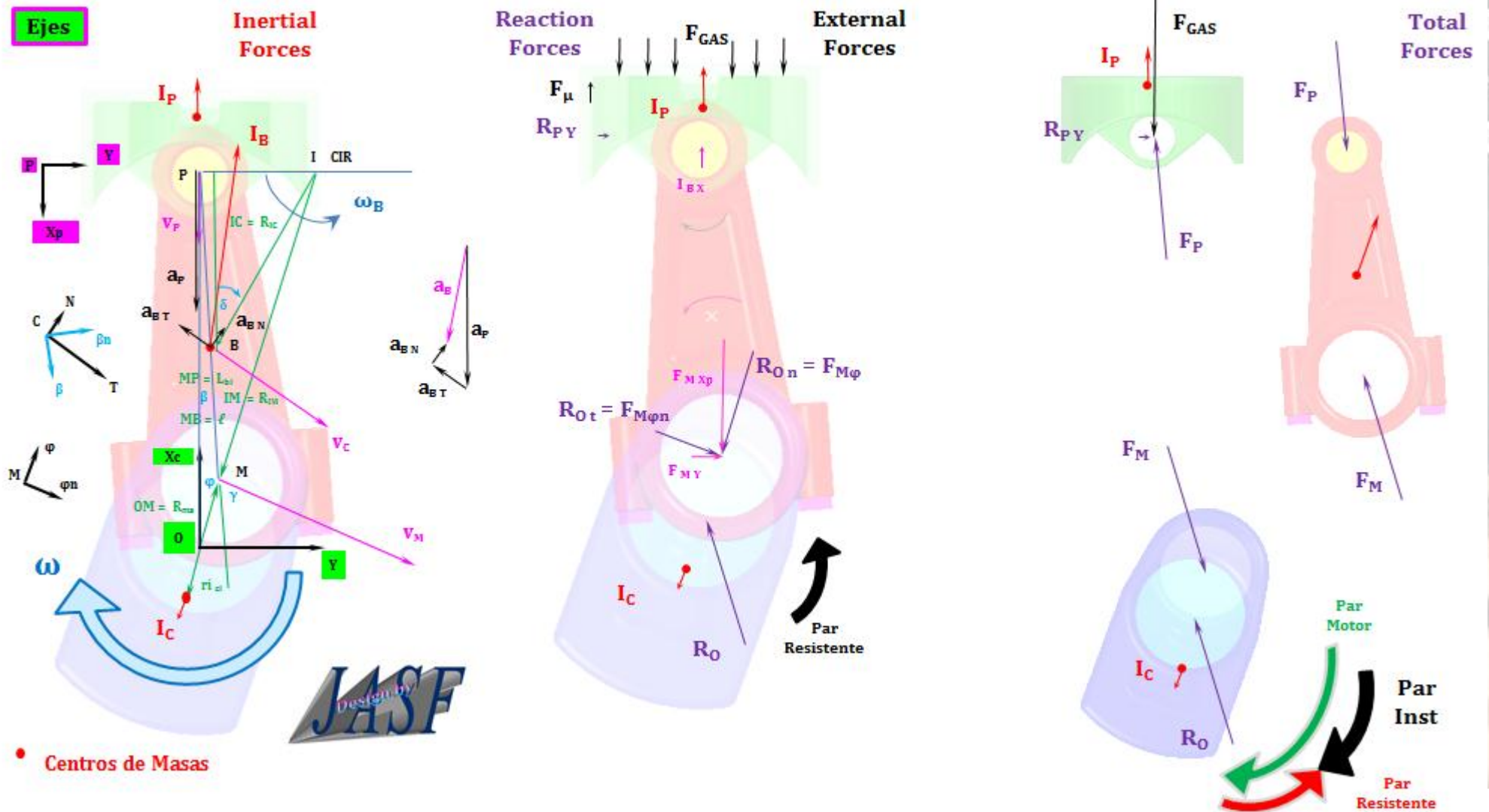




CIR Rotacional and Tangent Vectors Connecting Rod Inertia para un ciclo completo

Para calcular the ConRod Inertia necesitamos conocer las velocidades y aceleraciones angular y lineal ω_β v_B α_β a_B

Se calcula analíticamente, pero en un momento dado, en lugar de realizar cálculos diferenciales complicados, lo hacemos por diferencias entre 2 estados: el giro de 1° del crankshaft: $a_{Bt} = \Delta|v_B| / \Delta t$ a_{Bt} aceleración tangencial de B (CM de Biela)



Se grafican

$$\omega_{\beta} = \omega R_{ma}/R_{IM}$$

$$\omega_{\beta} = d\beta/dt$$

$$\omega_{\beta} = \Delta\beta/\Delta t$$

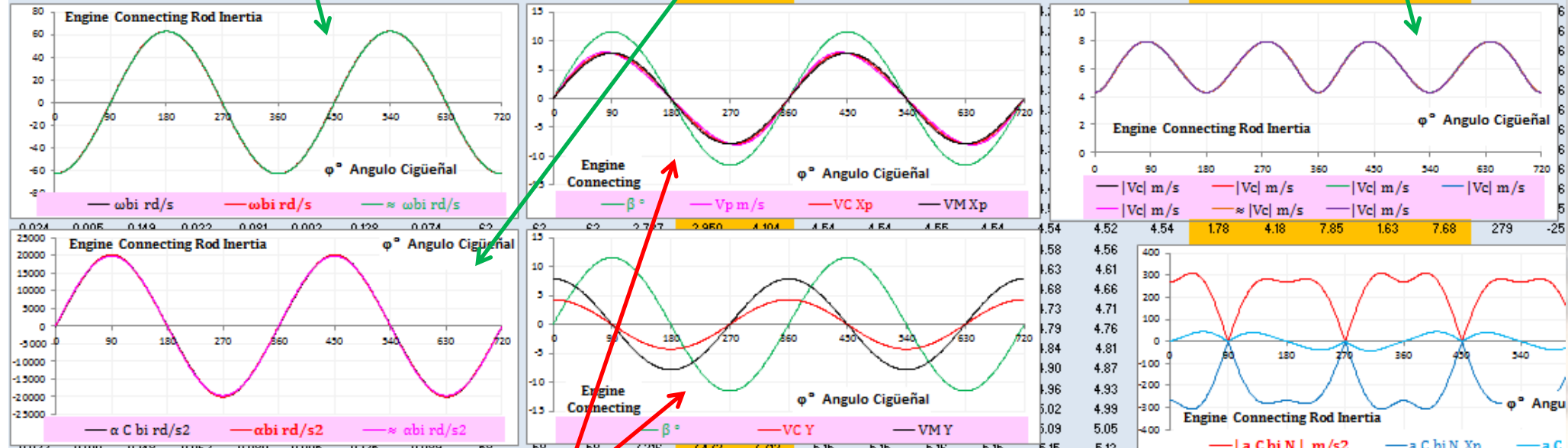
escogemos

$$\omega_{\beta} = d\beta/dt = \cos\varphi \omega / (\lambda^2 - \text{sen}^2\varphi)^{1/2}$$

Las 3 gráficas de ω_{β} se confunden (son \approx iguales). Las 3 gráficas de α_{β} son \approx iguales. Las 7 gráficas de $|v_{\beta}|$ son \approx iguales.

El hecho de que \approx coincidan nos da ciertas garantías de que no hay errores en la formulación (es muy fácil equivocarse).

0.025	0.025	0.150	7.040	0.082	0.014	3.2E+14	3.2E+14	63	63	63	20,145	20,146	19,739	7.90	7.90	7.90	7.90	7.90	7.90	7.90	7.90	7.89	4.27	7.85	7.85	7.85	310	0
0.000	0.000	0.124	-1E+12	0.056	0.000	1.4E+12	1.4E+12	0	0	0	0	0	0	6.20	6.20	6.20	6.20	6.20	6.20	6.20	6.20	0.00	0.00	7.85	0.00	0.00	226	-13
-0.025	-0.025	0.100	-3E+14	0.032	-0.014	0.125	0.068	-63	-63	-63	-20,145	-20,146	-19,739	4.27	4.27	4.27	4.27	4.27	4.27	4.27	4.27	-7.89	-4.27	7.85	-7.85	-7.85	0	-2E
										0	0	0	0	4,462	4,462	4,462	4,462	4,462	4,462	4,462	4,462	0	0	5,654	0	0	#####	-97,
x_H	y_H	x_I	y_I	x_C	y_C	$ R_{IH} $	$ R_{IC} $	ω_{bi}	ω_{β}	$\approx \omega_{bi}$	α_{Cbi}	α_{β}	$\approx \alpha_{Cbi}$	$ Vc $	$ Vc $	$ Vc $	$ Vc $	$ Vc $	$\approx Vc $	$ Vc $	V_{CxP}	V_{Cy}	V_H	V_{MxP}	V_{My}	a_{CbiN}	a_{Cbi}	
m	m	m	m	m	m	m	m	rd/s	rd/s	rd/s	rd/s ²	rd/s ²	rd/s ²	m/s	m/s	m/s	m/s	m/s	m/s	m/s	m/s	m/s	m/s	m/s	m/s	m/s	m/s ²	m/s ²
$\xi = \ell/L_{bi} = 0.456$						$n (rpm) = 3000$																						
$v_H (m/s) = \omega_H R_{ma} = 7.85$						$\omega (rd/s) = 314$																						
0.025	0.000	0.150	-0.003	0.082	0.000	0.125	0.068	-63	-63	63				4.27	4.27	4.27	4.27	4.27		4.27	-0.15	4.27						
0.025	0.000	0.150	0.000	0.082	0.000	0.125	0.068	-63	-63	-63	-165	0	0	4.27	4.27	4.27	4.27	4.27	4.27	4.27	4.27	0.00	4.27	7.85	0.00	7.85	268	-26



Se observa que las componentes de $|v_{\beta}|$ están entre las velocidades del pistón v_p y la manivela v_M (OK)

Se han elegido las soluciones

analíticas en rojo

$$\omega_\beta = d\beta/dt$$

$$\alpha_\beta = d\omega_\beta/dt$$

por tener mayor precisión

y basándonos en

$$\omega_\beta$$

se han calculado

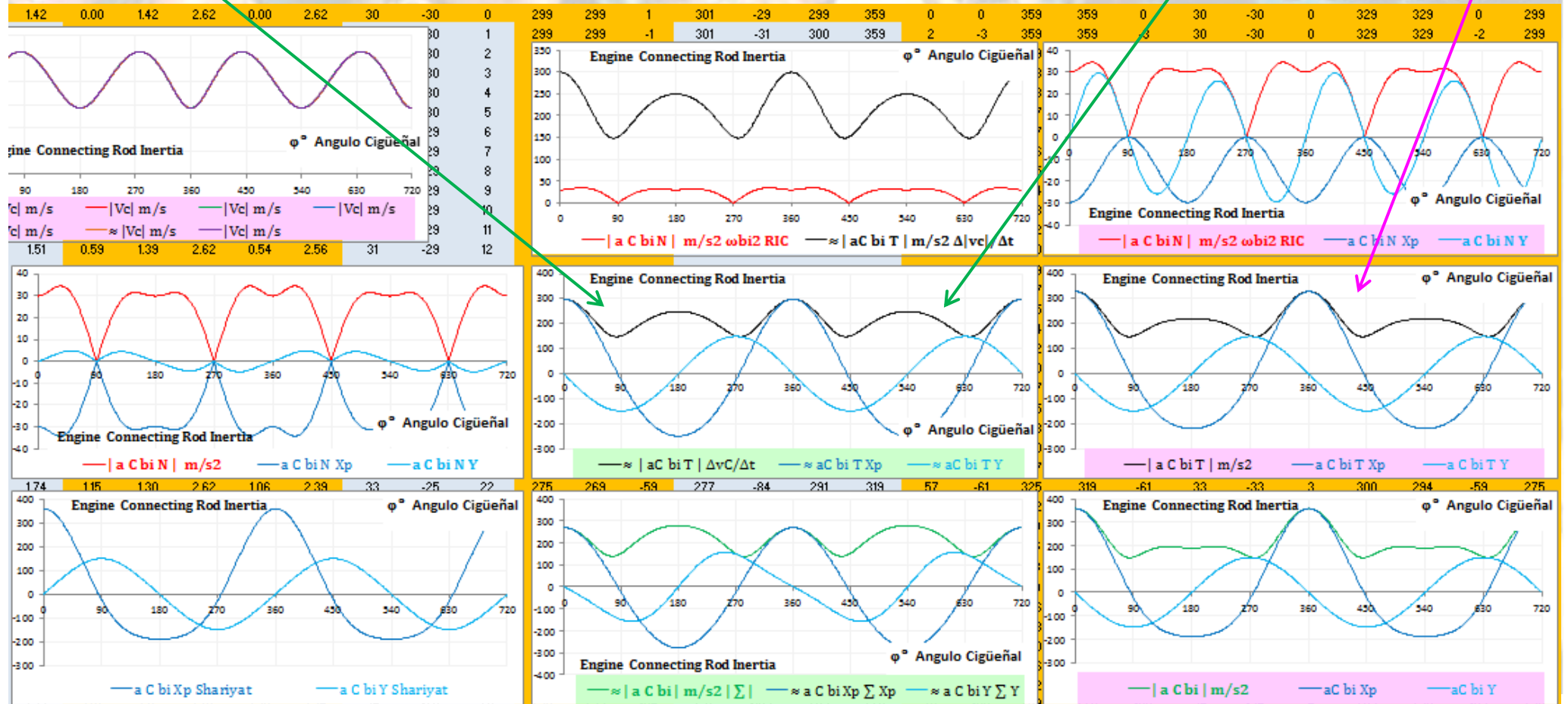
$$|v_B| = (v_p^2 + (L_{bi}(1 - \xi)\omega_\beta)^2)^{1/2}$$

$$|a_{\beta n}| = \omega_\beta^2 R_{IC}$$

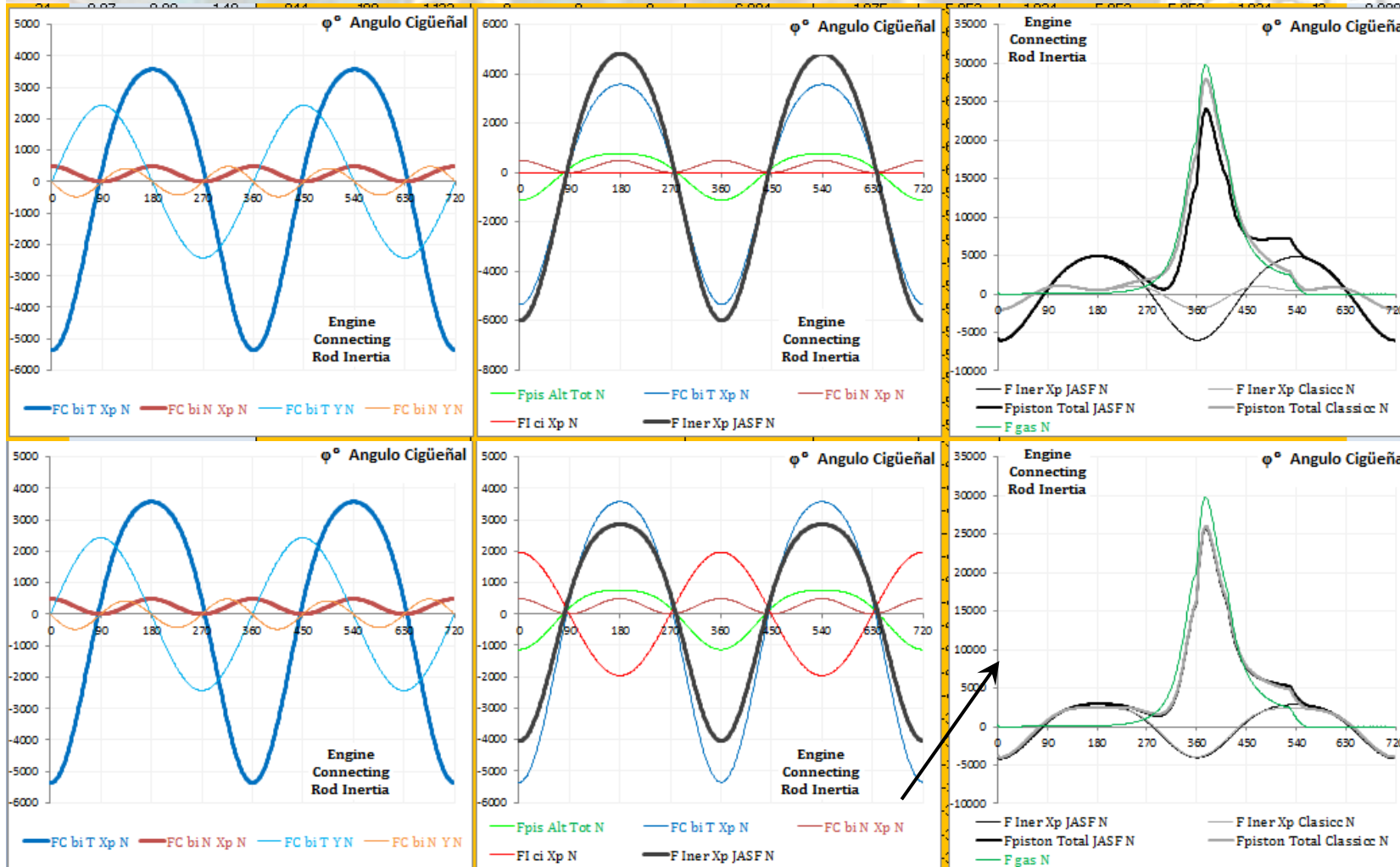
La aceleración tangencial la calculamos con el ordenador por diferencias entre los valores de $|v_B|$ para 1º de giro del cigüeñal

$$a_{Bt} = \Delta|v_B|/\Delta t \quad (\text{para deducir sin equivocarnos las soluciones analíticas que son un lío de signos}):$$

Comprobamos que la solución aproximada se parece a la analítica.



Con las aceleraciones **normal** $|a_{Bn}|$ y **tangencial** a_{Bt} calculamos las fuerzas de inercia de la biela y sus proyecciones sobre los ejes Xp del pistón y eje Y



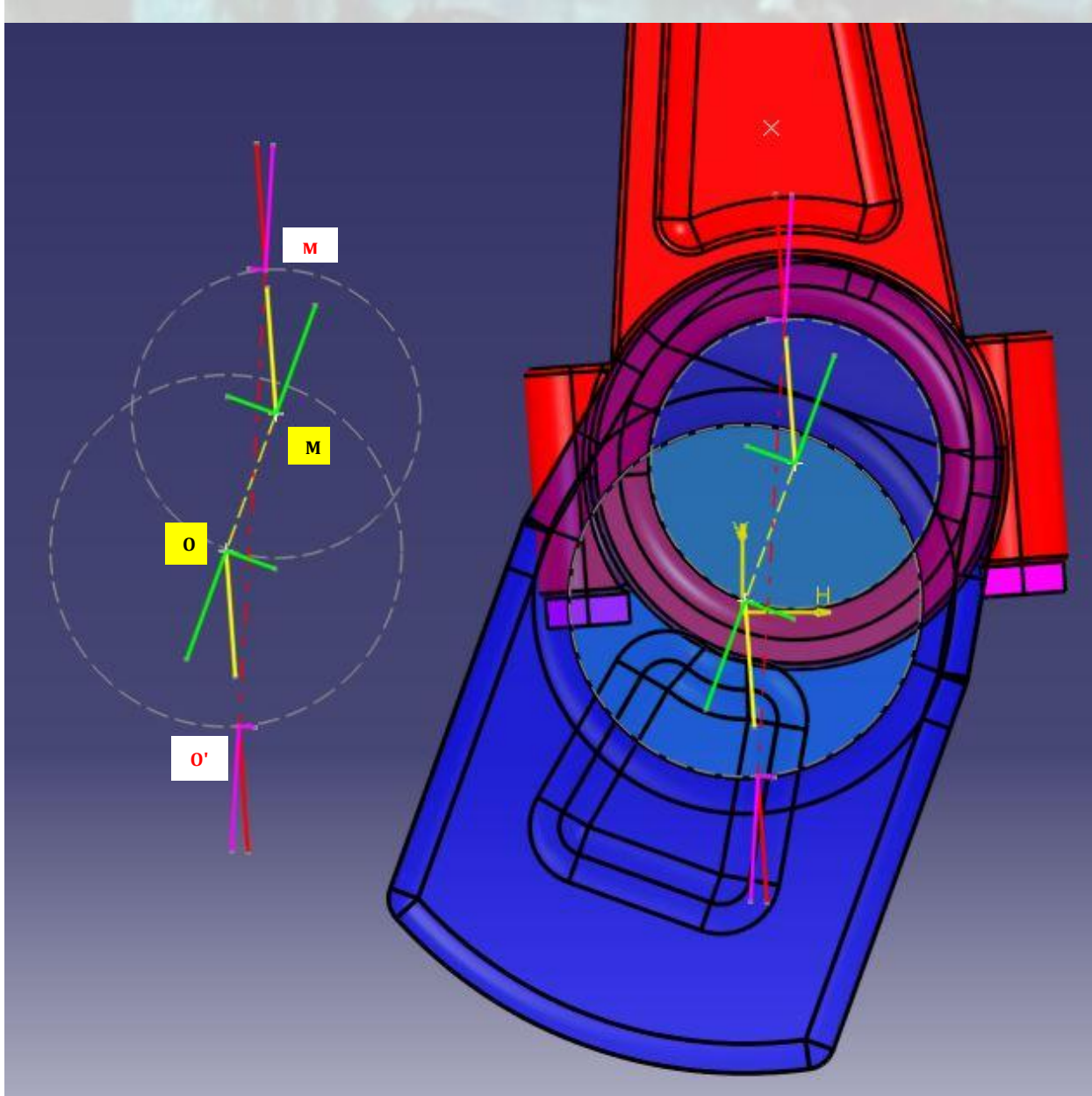
Arriba crankshaft equilibrado, $r_i = 0$
 La inercia classic no concuerda con la calculada a partir de la inercia de la biela (Iner JASF)

Abajo crankshaft NO equilibrado, con radio de inercia de $r_i = -0.004$ m (4 mm) hacia el contrapeso

Ambas inercias coinciden en este caso. Al sumarle al crankshaft 1/3 de la biela, $r_{if} \approx 0$ (r_{ifinal})

Las inercias transversales al eje MP de la biela se transmiten de forma inversamente proporcional al Centro de Masas C y tomando momentos respecto al punto M, tendremos $\sum M_M = I_{zz}$ bi α_β resolvemos las equivalentes en los extremos de la biela.

Influencia de los puntos de aplicación en la concentración de tensiones en el mecanismo biela-manivela.



Respecto de los centros geométricos O M

En Amarillo Fuerza Biela y Reacción Apoyo.

En Verde sus componentes Tangencial y Normal respecto de los ejes del Cigüeñal.

Cuando los Puntos de Contacto O' M' son los Puntos de Transmisión de Tensiones

En Rojo Fuerza Biela y Reacción Apoyo

En Magenta sus componentes Normal y Tangencial respecto del Cigüeñal.

Cuando el eje normal OM se convierte

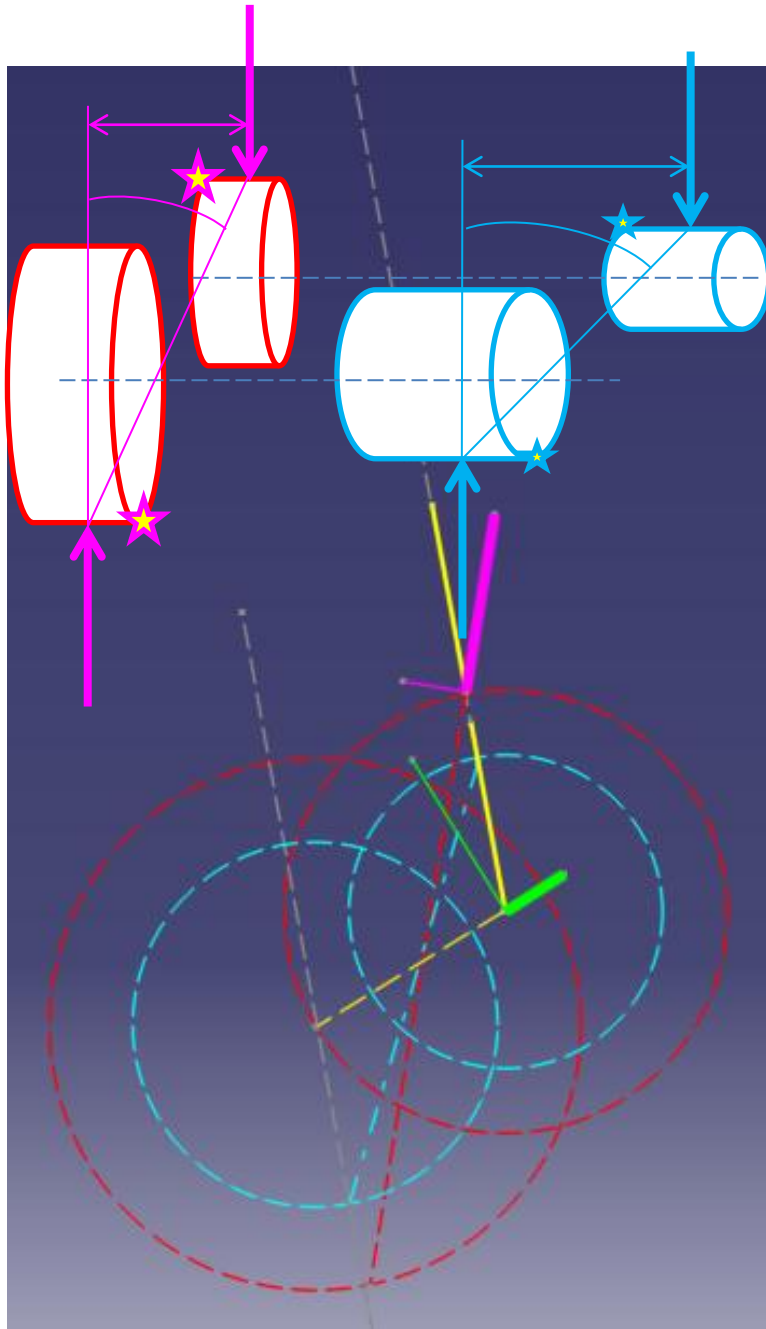
en el eje normal aparente O'M'

cambian las componentes de las fuerzas

Kinematics, Dynamics &

Thermodynamics NO Change

Stress Change



En el caso anterior, se aprecia gráficamente, que la componente normal apenas varía en el caso aparente. Cuando el ángulo girado del cigüeñal φ es mayor (figura adjunta) la componente que genera **compresión** (línea gruesa) **aumenta** considerablemente.

En los análisis de esfuerzos con software FEM, vemos que es en estos puntos O' M' donde hay concentración de tensiones ★

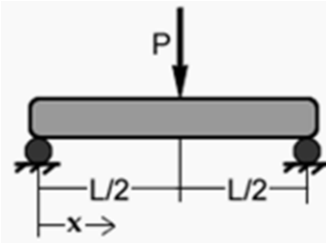
Aparte de otras consideraciones, **los radios de la manivela, del pie de la biela, Rpie y del cigüeñal, Rcr** tienen una gran influencia.

Cuando son más pequeños, la **tensión** será **menor** en estos puntos O' M' ★ (manteniendo la superficie de contacto aumentando la altura de estos cilindros ya que la fuerza que soportan es la misma).

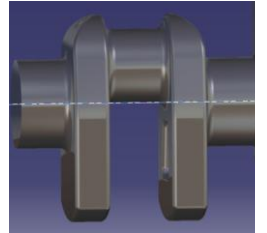
Se esboza gráficamente:

Radios ↑ Tensiones ↑ Luz ↓ **Radios ↓ Tensiones ↓ Luz ↑**

El diseño de vigas nos indica que la **Luz debe ser pequeña, por la flexión**



$$y_{max} = \frac{-PL^3}{48EI} \quad \theta_{max} = \frac{-PL^2}{16EI}$$



El ángulo constructivo idóneo será de $\approx 40^\circ$ por ejemplo ($\text{tg } 40^\circ = 0.84$)

Cinemáticamente, los puntos de giro deberían ser O M P (las escasas tolerancias obligan a ello).

Por tanto el Centro Instantáneo de Rotación CIR (punto I) seguiría siendo el mismo $x_I = x_P$ (NO $x_I = x_{P'}$).

Como P y P' están en el eje de la biela, no habrá cambios respecto al bulón, pero sí los habrá en el punto de aplicación de la Reacción de la camisa sobre el pistón (estará a la altura del punto P' en $x_{P'}$).

Tampoco habría cambios en la inercia de la biela, ya que su cálculo se hace en base a la cinemática.

No obstante, se adjuntan las relaciones de $x_{P'}$ $y_{P'}$ L'_{bi} l' ξ' si bien trabajar con esta hipótesis obligaría a redefinir los puntos de contacto O' M' P' que "rotarían" sobre O M P respectivamente.

Para elegir un punto de diseño (o varios) debemos tener en cuenta que la fuerza del gas de expansión F_{gas} depende de:

- el **ángulo φ** del giro del cigüeñal
- el **dosado Fr** (acelerador \approx dar gas. Dosado, Fr , es el ratio combustible/aire de la mezcla).
- Las **revoluciones n** a las gire el motor

Si bien las máximas tensiones aparecerán subiendo una cuesta muy empinada (Fr máximo) o yendo a máxima velocidad (n máxima), la situación típica del motor en su vida útil, serán dosados y revoluciones intermedios. A modo ilustrativo:

- | | | | | | |
|---------|----------------------|-----------------|--------------------|----|----------------------------|
| a) Para | $\varphi = 10^\circ$ | $n = 3.000$ rpm | dosado $Fr = 20\%$ | => | $F_{gas} \approx 24.000$ N |
| b) Para | $\varphi = 10^\circ$ | $n = 3.000$ rpm | dosado $Fr = 80\%$ | => | $F_{gas} \approx 45.000$ N |

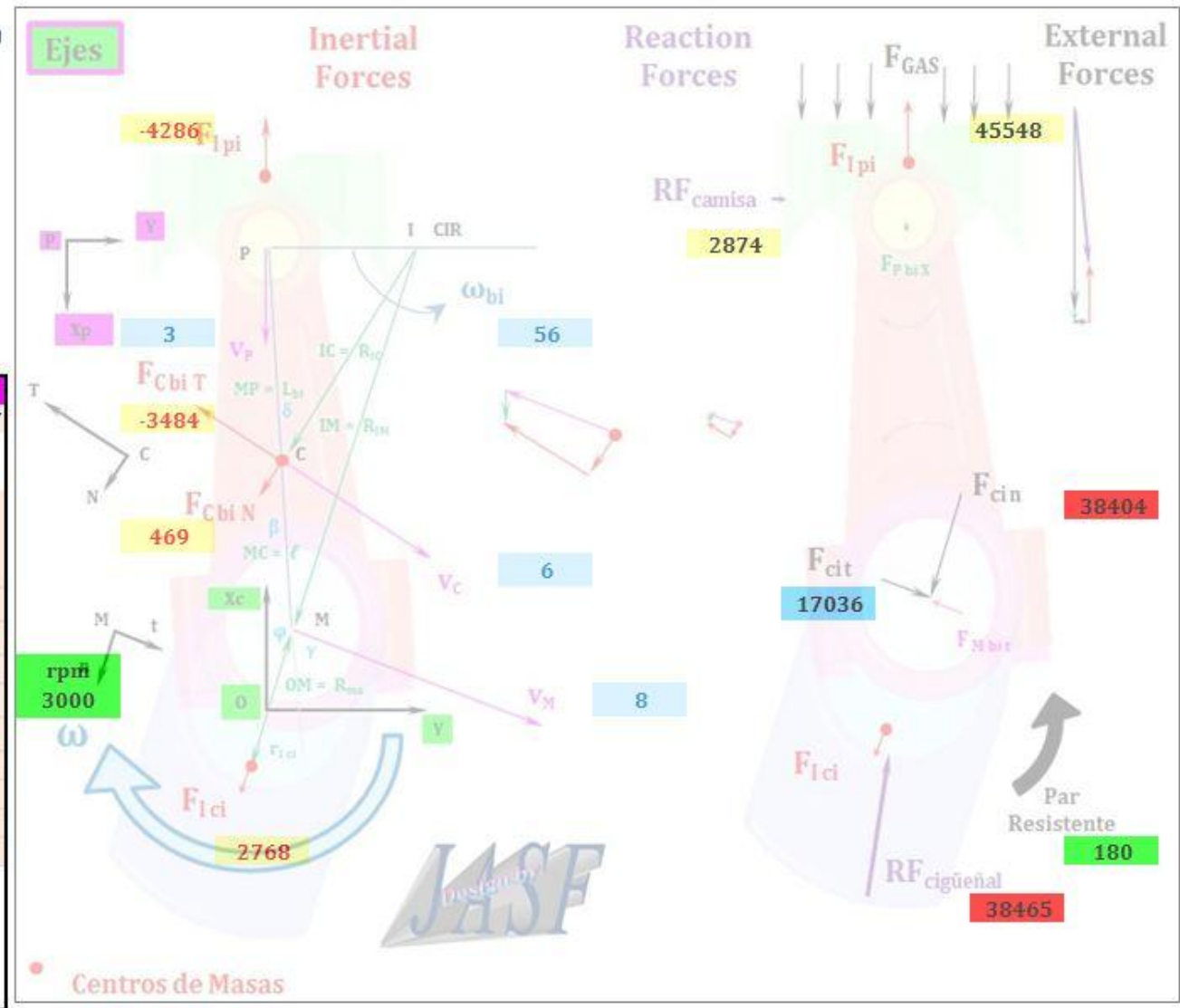
Analizando el caso b)

- b-1) si estamos subiendo una pendiente pronunciada con velocidad constante ($a = 0$) el par resistente medio será máximo e igual al par motor medio.
- b-2) pero si vamos llaneando el par resistente medio será menor que el par motor medio y el motor se acelerará

Durante el ciclo, tendremos para $\varphi = 20^\circ$ $n = 3.000$ rpm dosado $Fr = 80\%$ (ver gráfico siguiente)

el par resistente en ese instante será \approx el **42 %** (b-1) o menor (b-2) del par motor medio y el resto de par 58% acelerará el motor.

Ejes Xc Y			
φ	°	380	
β	°	4	
γ	°	66	
x_M	m	0.023	$t_{11}^{\circ} (s) = 56 E-6$
y_M	m	0.009	$\omega (rd/s) = 314$
V_M	m/s	8	$n (rpm) = 3,000$
x_I	m	0.148	Dosado Fr 80%
y_I	m	0.054	Iny n°gi 35
x_C	m	0.080	
y_C	m	0.005	$m_{ci} (kg) = 4.974$
δ	°	36	$r_i (m) = -0.006$
$ R_{IM} $	m	0.133	$\xi = \ell/L_{bi} = 0.456$
$ R_{IC} $	m	0.084	
Fuerzas ejes Xp Y			
		Componente Xp	Componente Y
X_p	m	0.002	
V_p	m/s	3	
A_p	m/s ²	2696	
ω_{bi}	rd/s	56	$\omega_b (rpm) = 531$
$ V_c $	m/s	6	3
a_{CbiT}	m/s ²	1925	1557
a_{CbiN}	rd/s ²	259	-210
F_{CbiT}	N	-3484	-2048
F_{CbiN}	N	469	-380
$F_{pistón Alt Tot}$	N	-4286	-4286
$F_{I cigüeñal}$	N	2945	2768
$F_{Inercial Total}$	N	3945	-3634
$F_{pistón Expan}$	N	45615	45615
$F_n camisa$	N	2878	2878
$F_{pist Total}$	N	41936	1343
$F_{t biela}$	N	42080	
$F_n cigüeñal$	N	38465	
$F_{t cigüeñal}$	N	17063	
Par cig. Inst.	N m	427	100%
Par Resistente	N m	180	42%



Nótese que en ese instante $\varphi = 20^\circ$ hay aceleración instantánea α_{mi} del cigüeñal cuyo valor aproximadamente será:

Datos para Cálculos de Inercias

$m_c =$	1500	kg	1500	masa del coche
$h_{cm} =$	0.3	m	0.3	altura del centro de masas del coche
$m_r =$	50	kg	50	masa de las 4 ruedas
$r_r =$	0.3	m	0.3	radio de las ruedas del coche
$m_g =$	100	kg	100	sumatorio de masas girando excepto ruedas (diferencial, transmisión, gearbox, motor,...)
$r_g =$	0.1	m	0.1	radio medio de masas girando excepto ruedas (diferencial, transmisión, gearbox, motor,...)

Datos: Sea un coche que va a $V_c = 72$ km/hora (20 m/s) y a) pasa de 0 a 108 km/hora (30 m/s) \approx en 10 segundos b) lleva velocidad constante

a) pasa de 0 a 108 km/hora (30 m/s) \approx en 10 segundos

$\Delta v_c =$	30	m/s	b) lleva velocidad constante	108	km/hora
$\Delta t =$	10	s	$v_c = \text{cte}$		

$a_c =$	3	m/s ²	0	aceleración media del coche	Fr = 80% Dosado
$\alpha_r =$	10	rd/s ²	0	aceleración angular media de las ruedas del coche	
$\omega =$	314	rd/s	314	velocidad angular media del motor	3000 rpm
$v_c =$	20	m/s	40	velocidad media del coche	72 km/hora 144
$\omega_r =$	67	rd/s	133	velocidad angular media de las ruedas del coche	
$n_r =$	5		2	relación de transmisión motor/ruedas	
$\alpha_m =$	47	rd/s ²	0	aceleración angular media del motor	

$I_r =$	2.3	kg m ²	2.3	momento de Inercia de las ruedas	$I = \frac{1}{2} m_r r_r^2$
$I_g =$	0.5	kg m ²	0.5	momento de Inercia de lo gira excepto ruedas	$I = \frac{1}{2} m_g r_g^2$
$I =$	2.8	kg m ²	2.8	momento de Inercia total	
$F_{drag} =$	206	N	824	Drag Force	

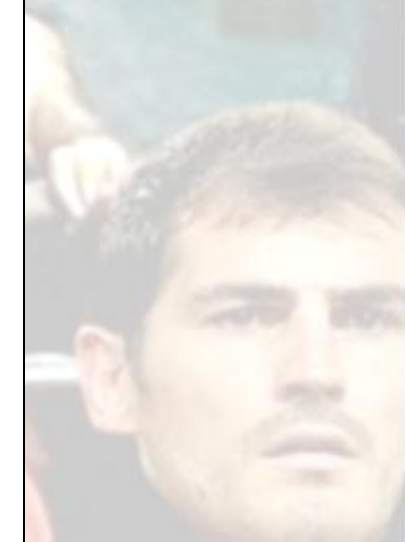
$$F_{\text{motor ruedas}} - F_{\text{resistente}} = \sum m a_{ci} + \sum \alpha_j I_j / r_j \approx m_c \alpha_{mi} r_r / n_r + \alpha_{mi} [I_r / (r_r n_r) + I_g / r_g] \quad a_{ci} = \alpha_{ri} r_r \quad \alpha_{mi} = n_r \alpha_{ri} \Rightarrow a_{ci} = \alpha_{mi} r_r / n_r$$

$$\alpha_{mi} \approx (F_{\text{motor ruedas}} - F_{\text{resistente}}) / [m_c r_r / n_r + I_r / (r_r n_r) + I_g / r_g]$$

$$\alpha_{mi} \approx (Par_{\text{ruedas inst}} - F_{\text{drag}}) / [m_c r_r / n_r + I_r / (r_r n_r) + I_g / r_g] \quad Par_{\text{ruedas inst}} = n_r Par_{\text{motor inst}}$$

$\alpha_{mi} (\omega 20^\circ) \approx$	17.7	rd/s ²	0.9	aceleración angular instantánea del motor $\phi = 380^\circ = 20^\circ$
$\alpha_{ri} \approx$	3.7	rd/s ²	0.4	aceleración angular instantánea de las ruedas del coche
$a_{ci} \approx$	1.1	m/s ²	0.1	aceleración instantánea del coche
$\alpha_{mi} (\omega 110^\circ) \approx$	6.8	rd/s ²	-1.9	aceleración angular instantánea del motor $\phi = 490^\circ = 110^\circ$
$\alpha_{ri} \approx$	1.4	rd/s ²	-0.8	aceleración angular instantánea de las ruedas del coche
$a_{ci} \approx$	0.4	m/s ²	-0.2	aceleración instantánea del coche
$\alpha_{mi} (\omega 160^\circ) \approx$	1.2	rd/s ²	-3.3	aceleración angular instantánea del motor $\phi = 520^\circ = 160^\circ$
$\alpha_{ri} \approx$	0.3	rd/s ²	-1.4	aceleración angular instantánea de las ruedas del coche
$a_{ci} \approx$	0.1	m/s ²	-0.4	aceleración instantánea del coche

sección
pañola
vuelve
a casa



Las velocidades y aceleraciones medias serán en el caso a) pasa de 0 a 108 km/hora (30 m/s) \approx en 10 segundos:

$$n = 3000 \text{ rpm} = 3000 \text{ rev/min} = f = 50 \text{ Hz} \quad f = 50 \text{ ciclos/s} = \omega = 314 \text{ rd/s}$$

$$\text{Relación de transmisión } n_r = \omega_{\text{motor}} / \omega_{\text{rueda}} = 314 / 67 = 4.7 \quad \alpha_m = n_r \alpha_r = 4.7 \cdot 10 = 47 \text{ rd/s}^2 \quad \text{media del cigüeñal}$$

Como el motor gira a $n = 3000 \text{ rpm}$ $f_{\text{motor}} = 50 \text{ ciclos/s}$ $\omega_m = 314 \text{ rd/s}$ un giro del cigüeñal tarda $T = 1/50 = 0.02 \text{ s/ciclo}$

$$\omega_f = \omega_o + \alpha t = 314 + 47 \cdot 0.02 = 314 + 0.94 \approx 315 \text{ rd/s} \quad \text{podemos asumir que gira a } \omega \text{ media cte para modelar un ciclo}$$

Las velocidades y aceleraciones instantáneas serán en el caso a) pasa de 0 a 108 km/hora (30 m/s) \approx en 10 segundos:

$$\alpha_{mi} \approx 18 \text{ rd/s}^2 \quad \text{instantánea del cigüeñal}$$

$$\omega_{\varphi 20^\circ} = 3000 \text{ rpm} = 314 \text{ rd/s} \quad \omega = \omega_o + \alpha \Delta t = \omega_o + \alpha_{mi} \Delta \varphi \cdot ti1^\circ \quad ti1^\circ = 56 \text{ E-6 s, tiempo de giro de } 1^\circ \text{ del cigüeñal}$$

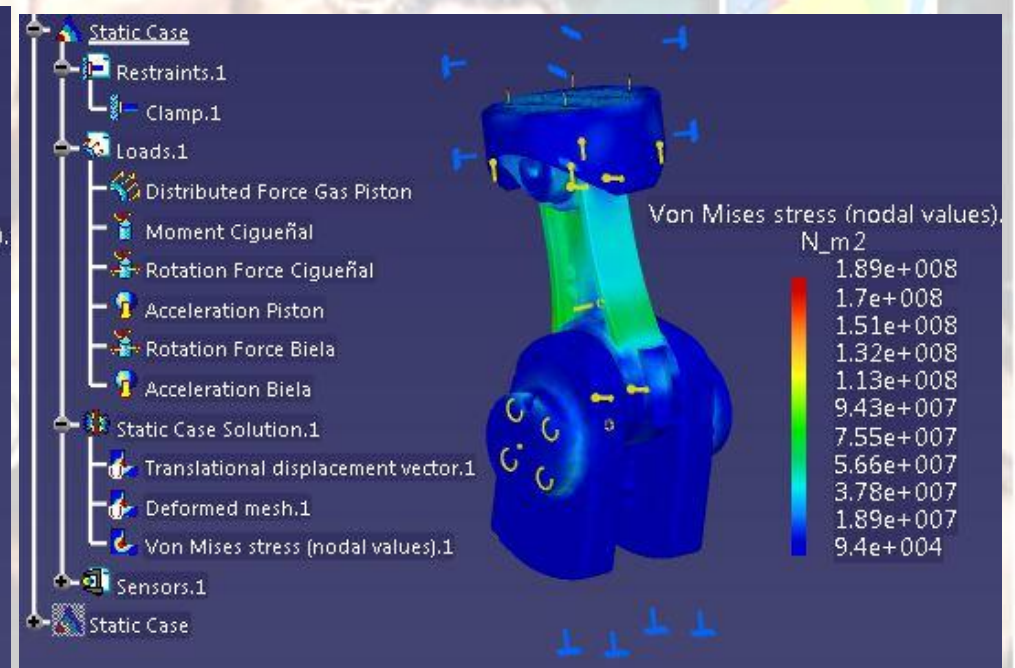
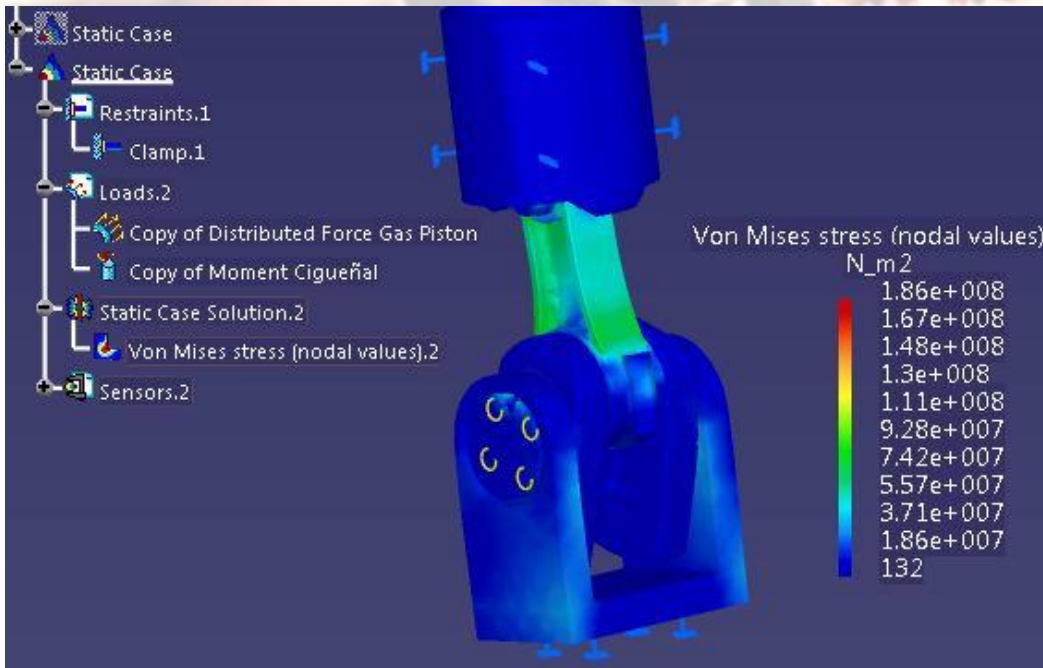
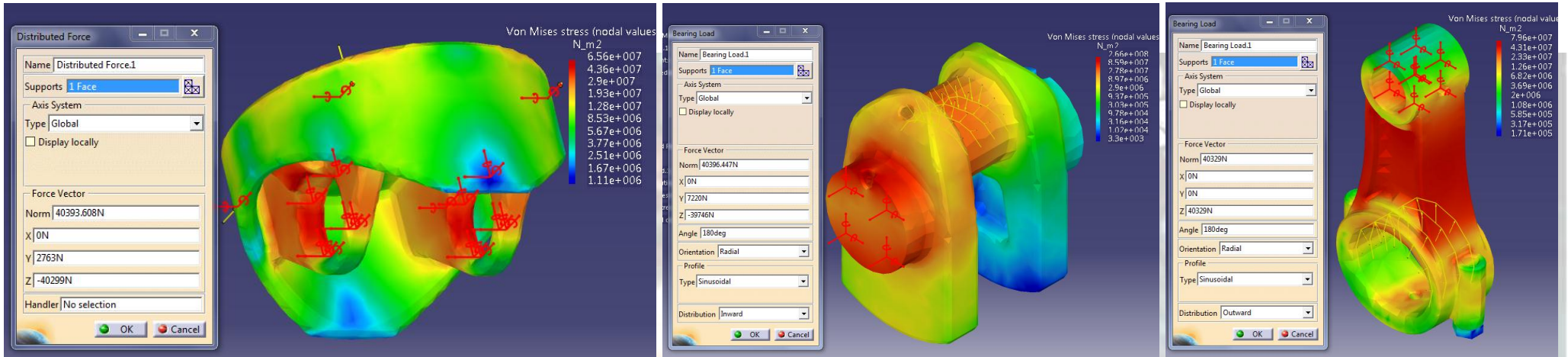
$$\omega_{\varphi 70^\circ} = \omega_{\varphi 20^\circ} + \alpha_{mi} \Delta \varphi \cdot ti1^\circ = 314 + 18 \cdot 50 \cdot 56 \text{ E-6} = 314 + 0.05 \approx 314 \text{ rd/s} \quad (\text{aumenta muy poco en } \Delta \varphi = 50^\circ)$$

Si $F_{\text{motor}} \text{ ruedas} > F_{\text{drag}} \quad \alpha_{mi} > 0$ (aceleración instantánea del cigüeñal)

Si $F_{\text{motor}} \text{ ruedas} < F_{\text{drag}} \quad \alpha_{mi} < 0$ (desaceleración instantánea del cigüeñal)

Como la aceleración angular instantánea del motor α_{mi} depende, además de los parámetros del coche (masa, etc.), de la velocidad del coche, la Drag Force, etc., supondremos que $\alpha_{mi} = 0$

Haciendo un análisis estático de las piezas individualmente obtenemos:



Realizando el análisis del cilindro completo sin y con inercias (vemos que hay poca variación).

Relaciones Geométricas		
Dp =	100	mm
Lbi =	125	mm
Rma =	25	mm
Medidas de partida FEM		
Pgas =	4 E+6	Pa
Ft biela =	26,004	N
Dpie =	15	mm
Dcab =	29	mm
Dapo =	35	mm
Masas de partida Aproximadas		
MaPi =	383	g
MaBi =	1,810	g
MaCi =	5045	g

Solution	Impact Velocity (m/s)	Strain Rate (/s)	Effect
Implicit ↓ Explicit	< 50	< 10 ⁻⁵ 10 ⁻⁵ - 10 ⁻¹	Static / Creep Elastic
	50 - 1000	10 ⁻¹ - 10 ¹	Elastic-Plastic (material strength significant)
	1000 - 3000	10 ⁵ - 10 ⁶	Primarily Plastic (pressure equals or exceeds material strength)
	3000 - 12000	10 ⁶ - 10 ⁸	Hydrodynamic (pressure many times material strength)
	> 12000	> 10 ⁸	Vaporization of colliding solids

Explicit	$\Delta t < f (h / c)_{min}$	Structural Steel
f =	0.9	f es el factor de paso de tiempo de estabilidad, $f \approx 0,9$
h =	0.001 m	h es la dimensión característica de un elemento (el menor de la malla)
c =	4990 m/s	c es la velocidad local de sonido en un elemento material $c = (E/\rho)^{0.5}$
$\Delta t <$	180 E-9 s	Δt es el incremento del tiempo de simulación de otra iteración
Para una simulación que dure $t_f = 0,1$ s \Rightarrow Nº iteraciones = $t_f / \Delta t = 0,1 / 180 \text{ E-}09 = 5.56\text{E}+05$		
$t_f =$	0.00004 s	tiempo que dura la simulación (ANSYS Explicit)
$\Delta t <$	180 E-9 s	$\Delta t < f (h / c)_{min}$
Nº it =	222	Nº iteraciones (ANSYS Explicit)
gas max =	26 E+3 Pa	Presión gas máxima
$(P/\sigma) / t_f$	3 /s	Strain Rate (Presión/ σ) / t_{final}
0.00000	< 1 E-5	Elastic / Creep (arrastre) (ANSYS Implicit)
0.00001	0.10000	Elastic (ANSYS Implicit)
0.1	10	Elastic - Plastic (material strength significant) (ANSYS Implicit)
100. E+3	1. E+6	Primarily Plastic (pressure equals or exceeds material strength) (ANSYS Explicit)
1. E+6	100. E+6	Hydrodynamic (pressure many times material strength) (ANSYS Explicit)
> 1 E+8	∞	Vaporization of colliding solids (ANSYS Explicit)

En transient analysis para que la simulación del cilindro dure un tiempo razonable deberíamos realizar unas 50 ó 100 iteraciones.

En explicit analysis 200 ó 300 iteraciones tardan un tiempo razonable.

Por tanto deberíamos simular unos
40 E-6 s = 0.000040 s \Rightarrow 222 iteraciones

Esto supone el giro del cigüeñal de casi 1 grado

$t_{i1} = 56 \text{ E-}6$

Dado que

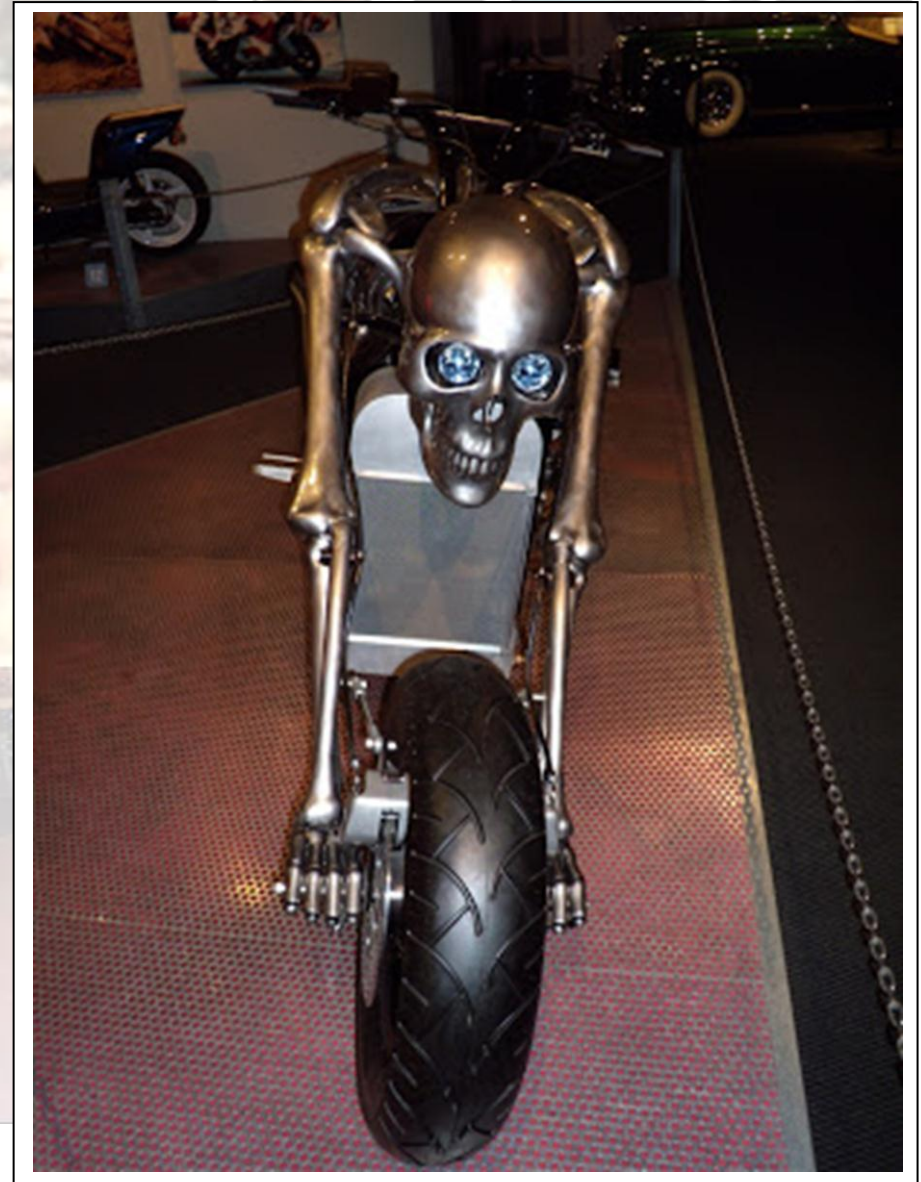
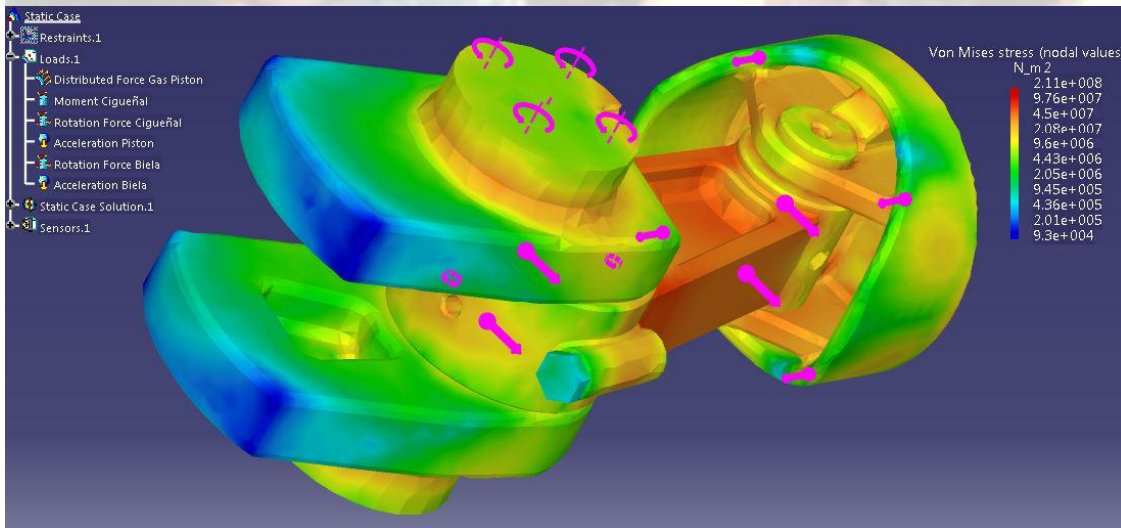
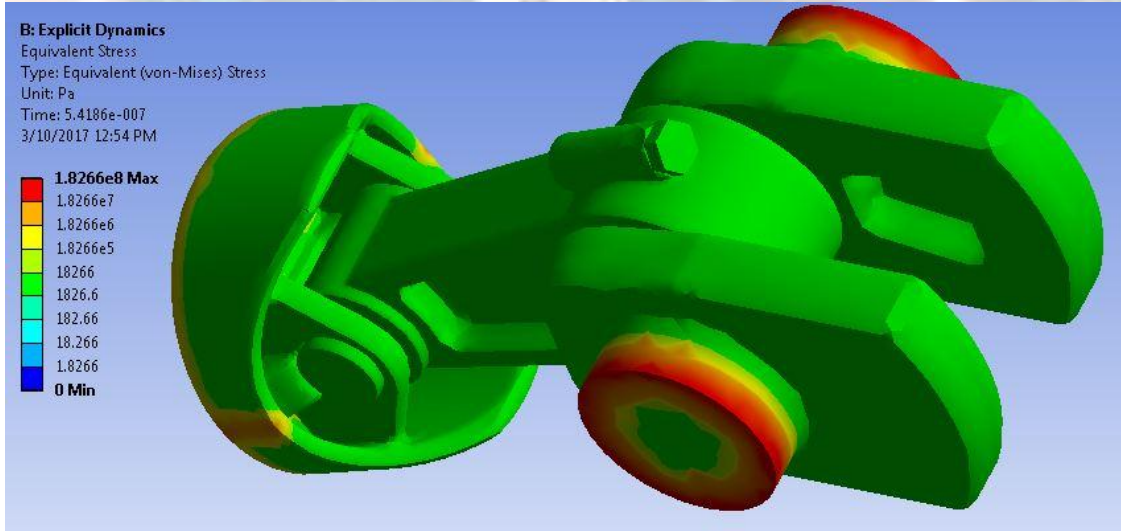
$\text{Strain Rate} = (\text{Presión}/\sigma) / t_{final}$

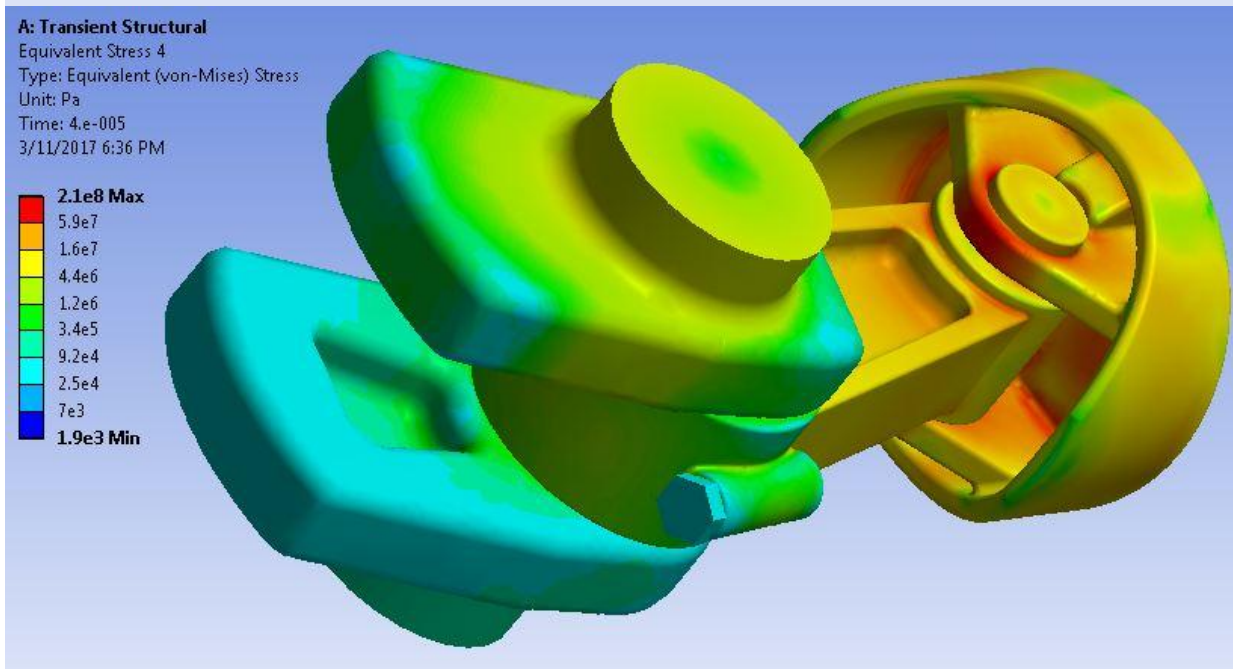
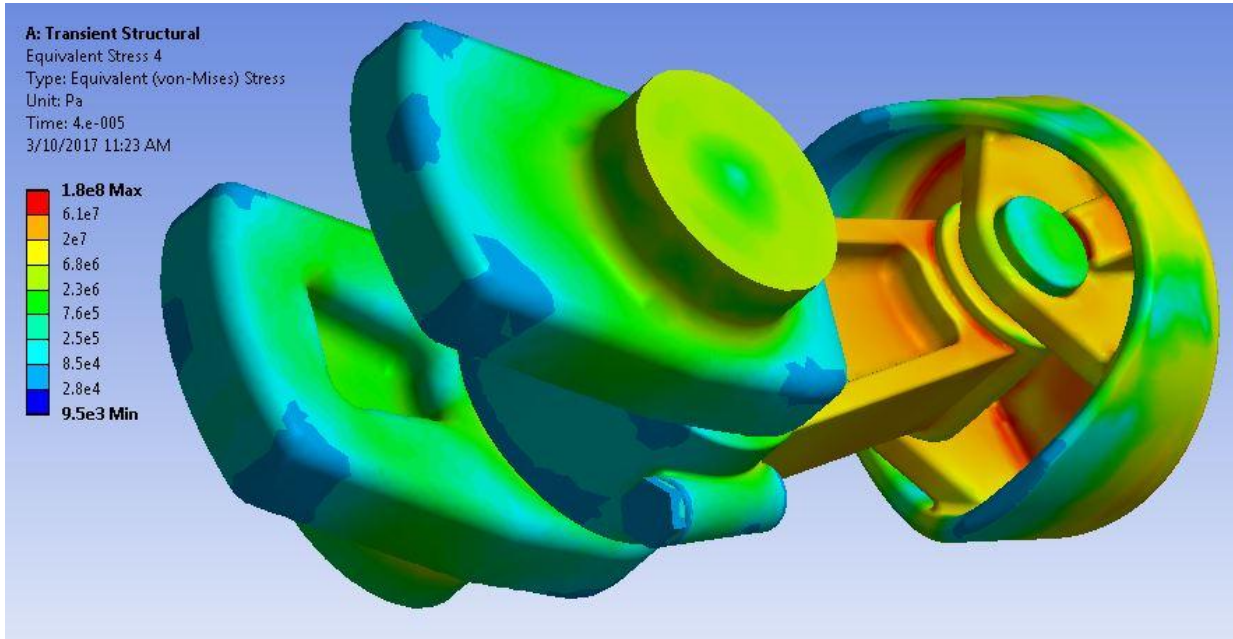
$(P/\sigma) / t_f = 3 /s$ Strain Rate

Por tanto estamos en la zona de

Implicit transient analysis

Añadiendo inercias, velocidades y aceleraciones rotacionales de biela y cigüeñal y traslacionales del pistón, con $F_{\text{piston total}} = 45615 \text{ N}$ y $\text{Par Resistente} = 180 \text{ Nm}$ la simulación resulta:

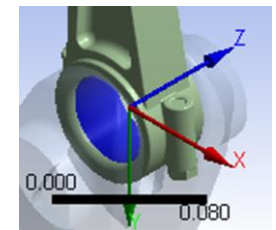
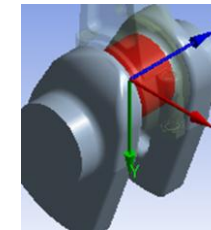




Estas dos simulaciones solo se diferencian en el **comportamiento de los contactos** (juntas de revolución y cilíndrica).

En el primer caso, las superficies en contacto se suponen rígidas (**rigid behavior**).

En el segundo caso, se suponen deformables (**deformable behavior**).



Criterio

Contact surface

Target surface

convex

concave

fine mesh

coarse mes

softer

stiffer

3D lower-order

3D higher-order

inner (narrow, small)

surrounds (large)

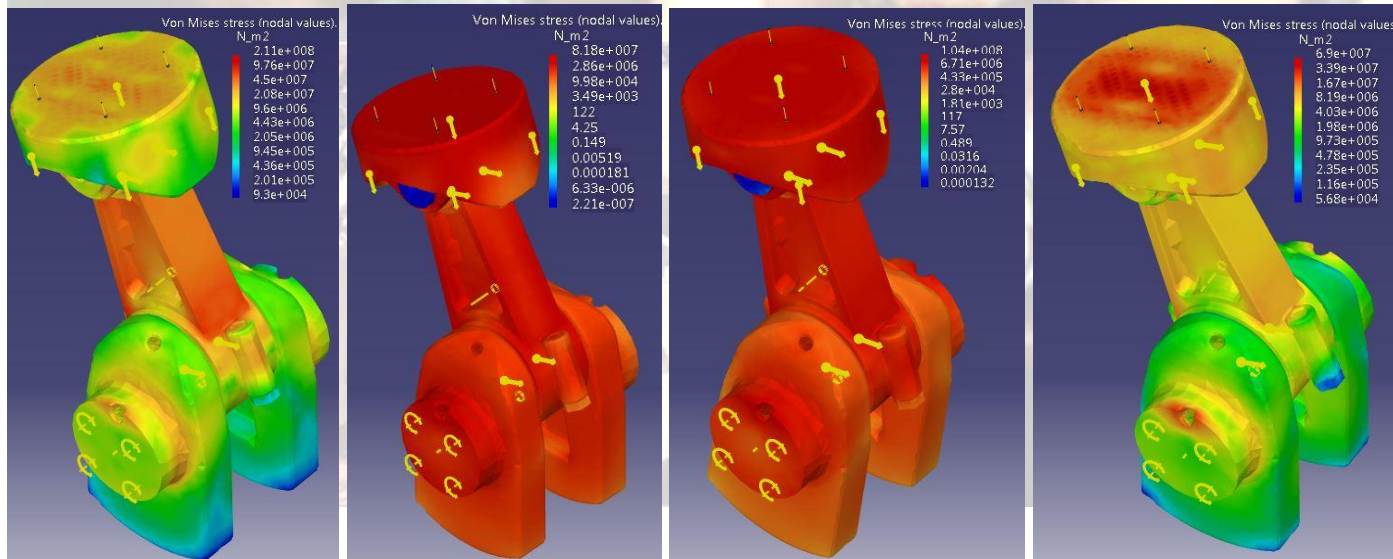
A **Fastened** Connection is the *link between two bodies which are fastened together at their common boundary*, and will behave as if they were **a single body**. Fastens bodies together at their common interface.

A **Slider** Connection is the *link between two bodies which are constrained to move together in the local normal direction at their common boundary*, and will behave as if they were allowed to slide relative to each other in the local tangential plane. Fastens bodies together at their common interface in the normal direction while **allowing them to slide relative to each other** in the tangential directions.

A **Contact** Connection is the *link between two bodies which are prevented from inter-penetrating at their common boundary*, and will behave as if they were allowed to move arbitrarily relative to each other as long as they don't come into contact within a user-specified normal clearance. **Prevents bodies from penetrating each other at a common interface.**

A **Rigid** Connection is the *link between two bodies which are stiffened and fastened together at their common boundary*, and will behave as if their **interface was infinitely rigid**. Fastens bodies together at a common rigid interface.

A **Smooth** Connection is the *link between two bodies which are fastened together at their common boundary*, and will behave approximately as if their **interface was soft**. Fastens bodies together at a common soft interface.



Análisis, de izquierda a derecha,
según el tipo de
connections bodies

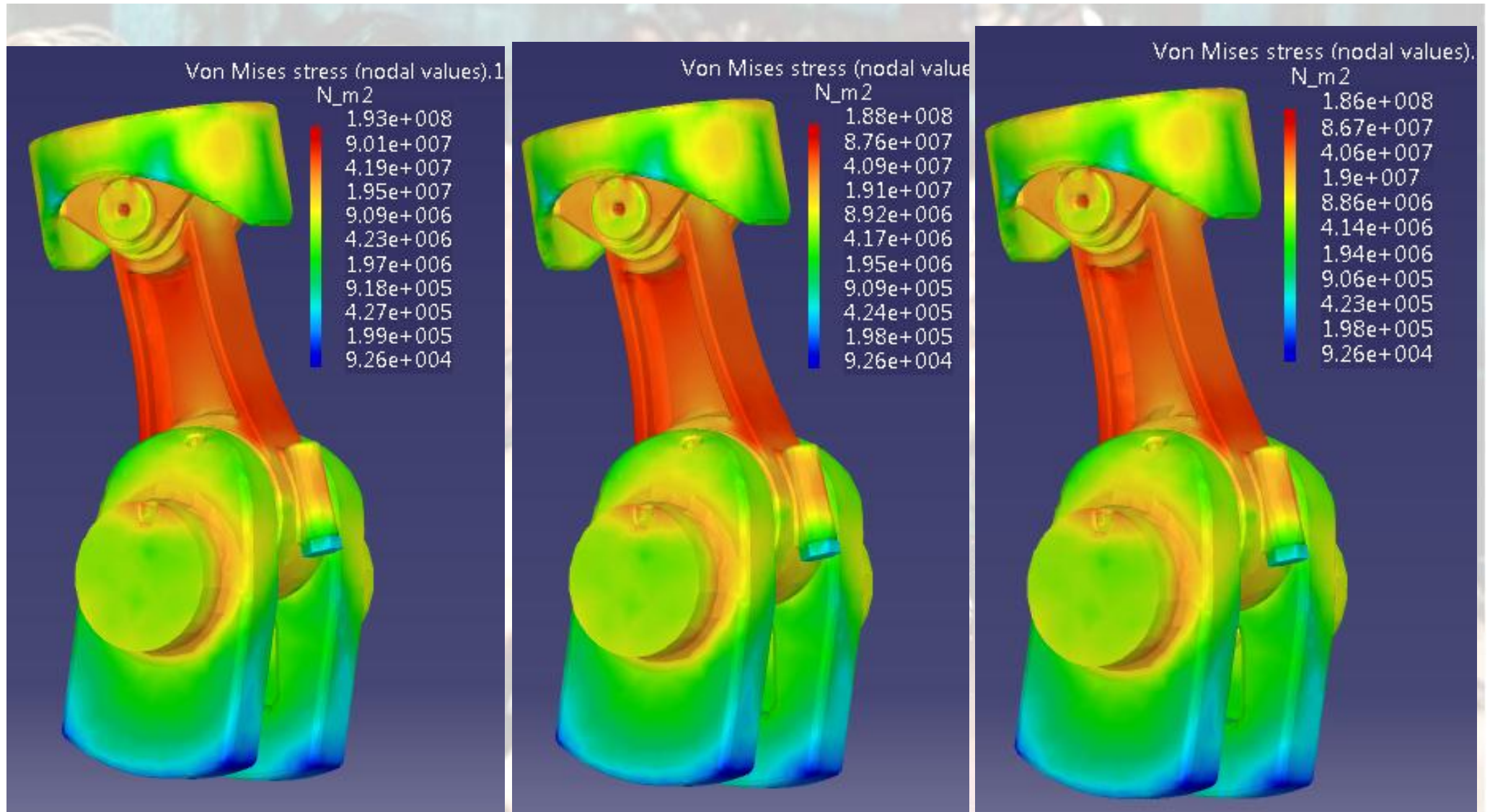
Contact

Rigid

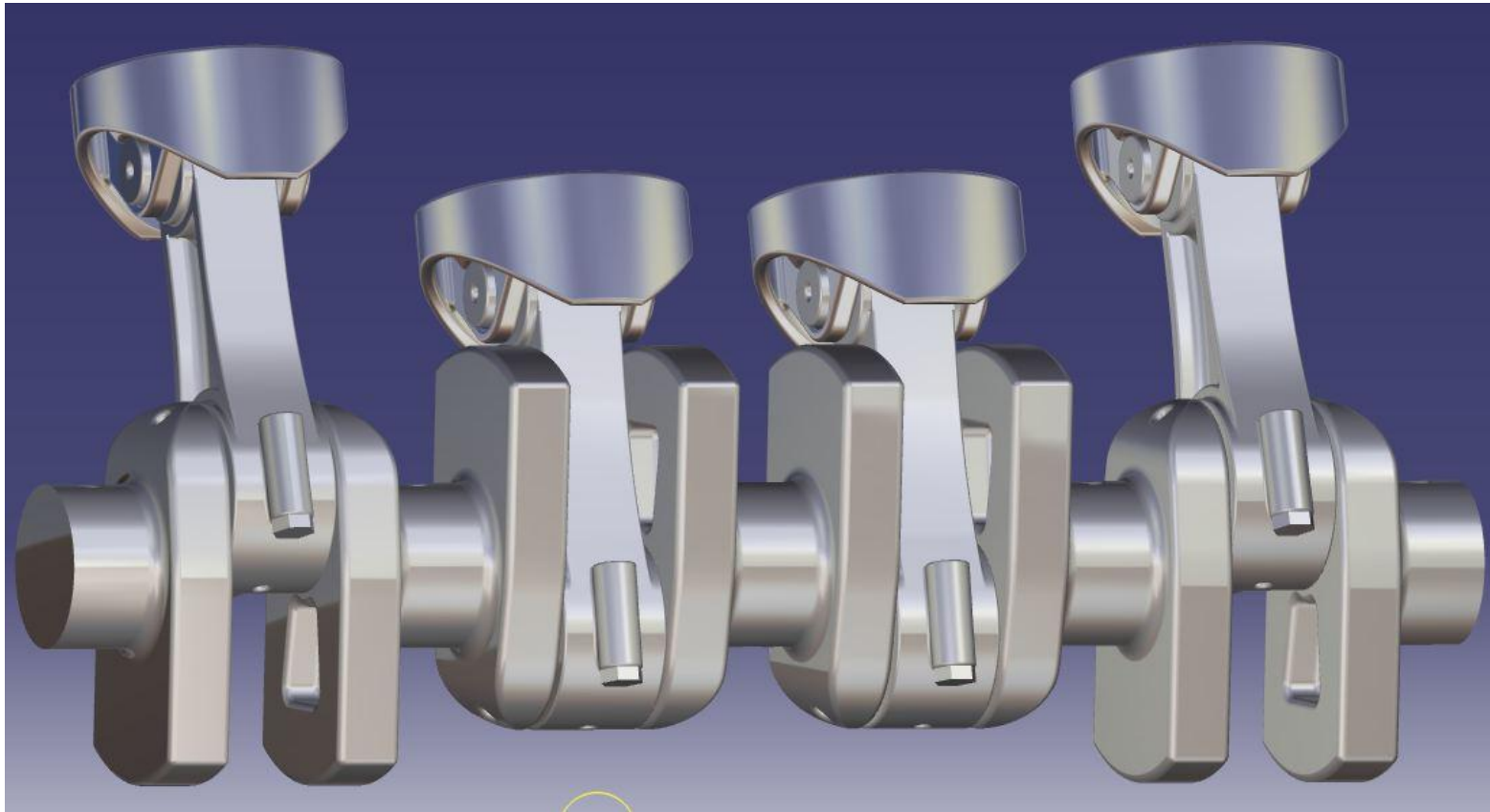
Smooth

Contact+ Smooth

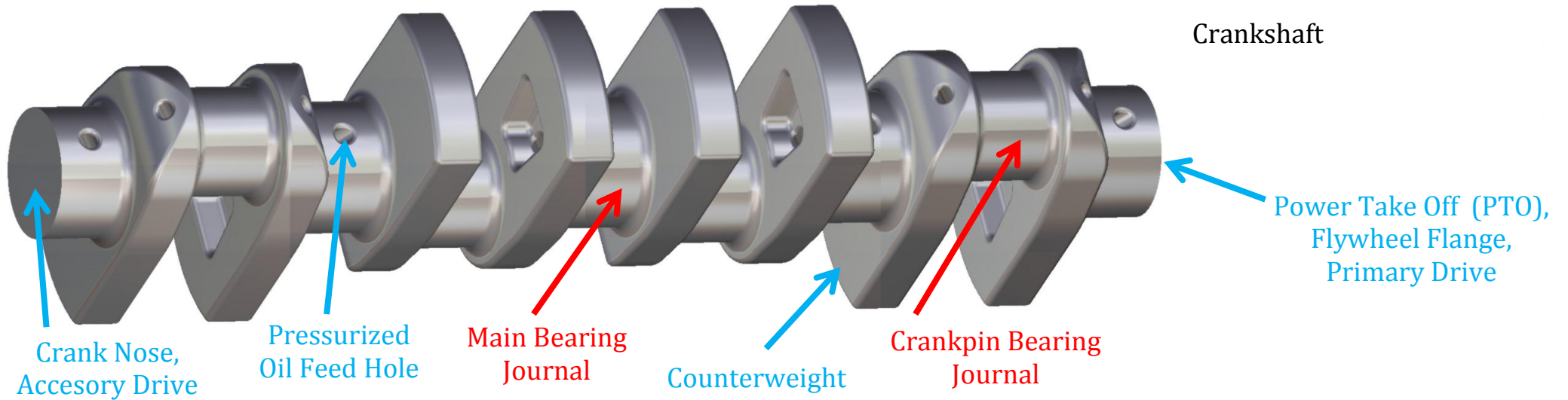
Elegido el modelo de simulación * (i.e. rigid contact, rigid connection bodies) depuramos el diseño, *sin obcecarnos (esto es teoría)*:



* **Con sentido común:** vos no sos Honda, no podes fabricar motores para contrastar teoría y realidad. "¿lo hacen?" duda McLaren.



El motor de 4 cilindros en línea podría tener esta disposición.



Para diseñar el cigüeñal hay que tener en cuenta las fuerzas que actúan:

- en las 4 conexiones con las bielas, **Crankpin Journal**, **Fuerzas Normales** y **Tangenciales** desfasadas 180° (720/Nc).
- En los 5 rodamientos, **Mains Journals**, Σ Fuerzas de reacción en los apoyos = Σ Fuerzas.

Las **Fuerzas Normales** se reparten entre los 2 apoyos adyacentes. Idem para los pares debidos a las **Tangenciales**, pero

➤ **Tangencialmente, los momentos, torques o pares son:**

- en los **Crankpin Journal** las Fuerzas Tangenciales de las bielas proporcionan el **Par Instantáneo**, $P_{inst} = Rman \Sigma Ft$
- en el extremo del cigüeñal conectado a la Gearbox, el **Par Resistente** P_{Res} suma de los efectos debidos a la Drag Force y las Inercias (debidas a la inercia al giro de todo lo que gira + la inercia de traslación del coche) *.

* Realmente, para cada biela habría que aplicar **su Par Resistente P_{Res} por un lado** (gearbox, transmisión, coche) y **la inercia de lo queda por el otro lado** (resto del motor: 1 ó 2 ó 3 piston+biela+crankshaft, bomba), que es bastante menor frente a la inercia total (Drag Force y masa del coche por aceleración del coche):

En el supuesto anterior el par resistente debido a fuerzas (lo que no gira) será:

- (Drag Force = 500 N) * ($h_{CM} = 0.3$ m) = **150 Nm** par debido a la Drag Force = 500 N
- ($m_{coche} = 1500$ kg) * ($a = 3$ m/s) * ($h_{CM} = 0.3$ m) = **1350 Nm** par debido a la inercia de la aceleración del coche $a = 3$ m/s

Y el par resistente debido a lo que gira será:

$$\Sigma I = \frac{1}{2} m_r r_r^2 + \frac{1}{2} m_g r_g^2 = \frac{1}{2} 50 0.32 + \frac{1}{2} 100 0.1^2 = 2.25 + 0.5 \approx 2.75 \text{ kg m}^2$$

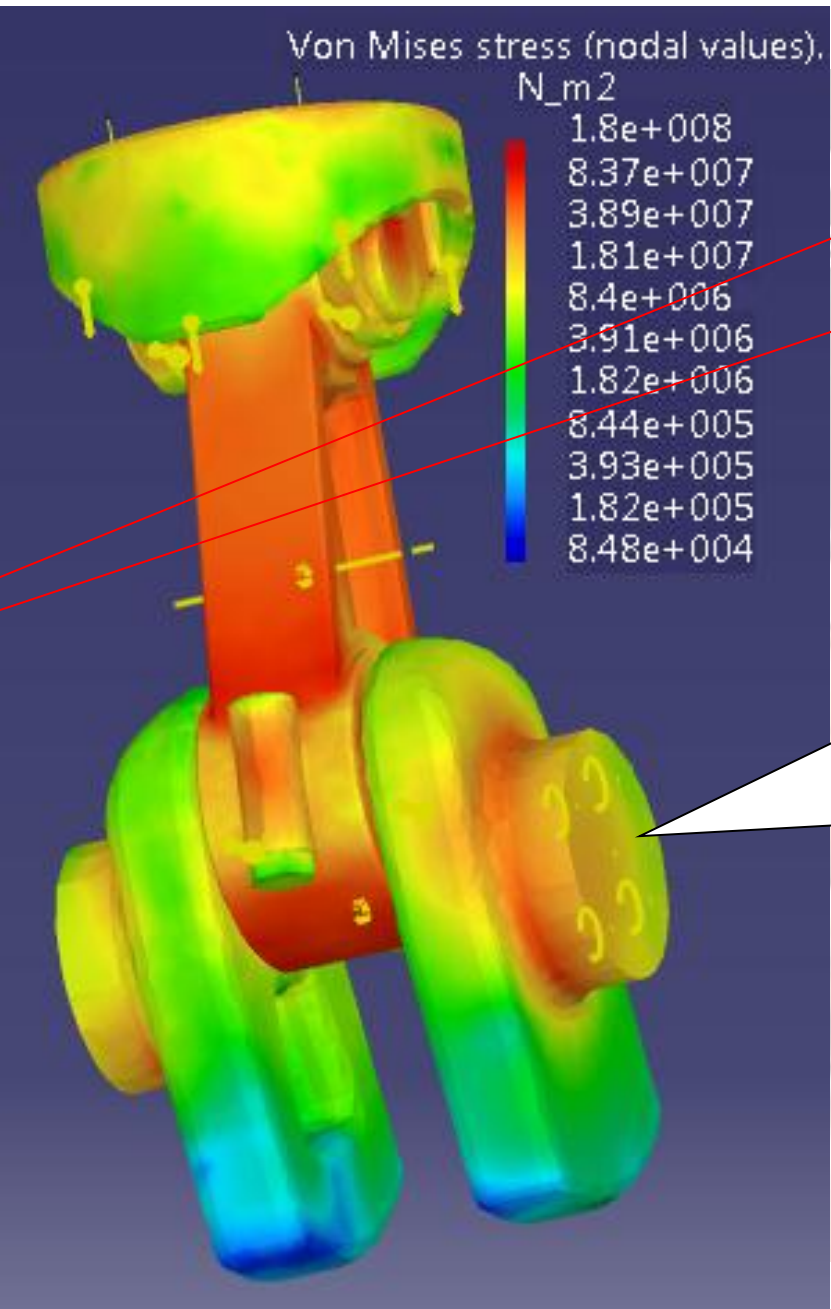
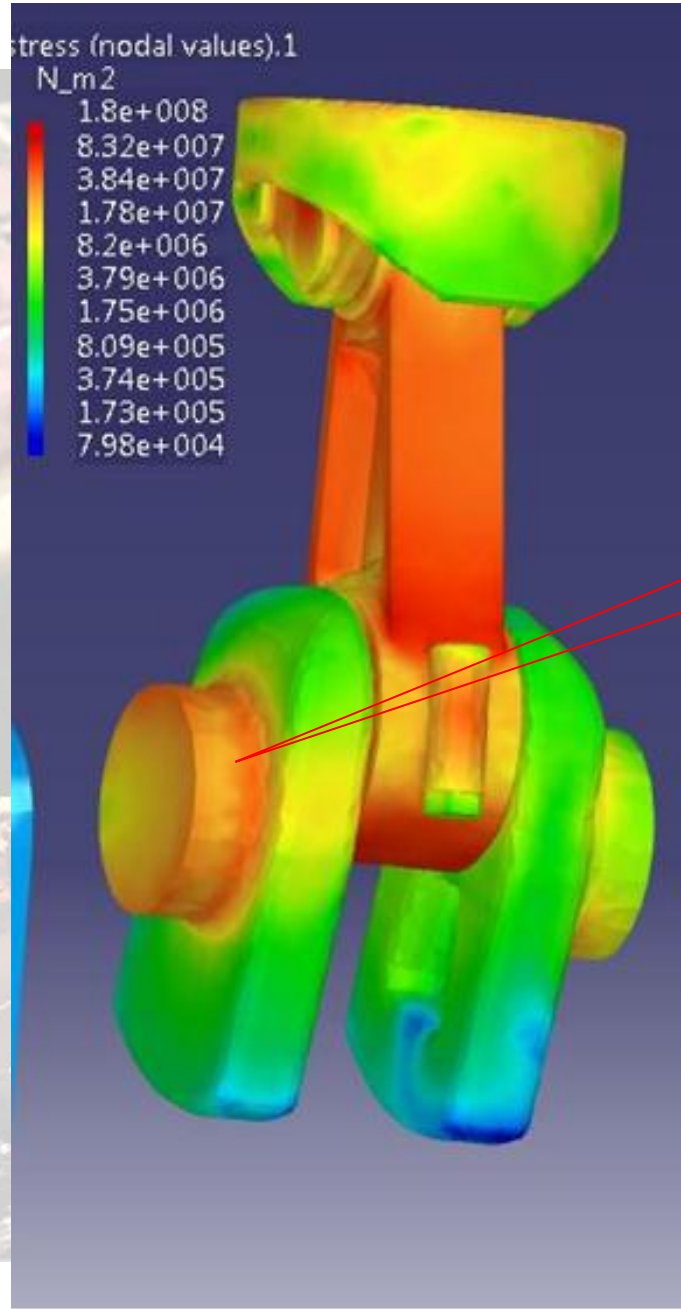
(la Inercia más importante es la de las ruedas **2.25 kg m2**)

Par bomba, alternador $P_a < I \alpha$ $P_a < \frac{1}{2} m r^2 \alpha$ $P_a < \frac{1}{2} 20 0.1^2 18 = P_a < 2 \text{ Nm}$ (< 20 kg \approx crankshaft + 3 bielas + 3 pistones)

Par gearbox $P_{gear} > I \alpha = [I_r/n_r + I_g] \alpha = (2.25/4.7 + \frac{1}{2} m_g r_g^2) \alpha = (0.5 + \frac{1}{2} 80 0.1^2) \alpha = (0.5+0.4) 18 \approx 16 \text{ Nm}$ (> 80 kg \approx 100 - 20)(gearbox, etc)

Par Resistente $P_{Res} \approx 150 + 1350 + 2 + 16 \approx 1518 \text{ Nm}$ **Par gearbox $\approx 1500 + 16 \approx 1516 \text{ Nm}$** **Par alternador $\lesssim 2 \text{ Nm}$**

El reparto de par (Par gearbox - Par alternador), sería $RPID = 100\%$ (el mismo para todos los cilindros, por simplificar), pero como por un lado el motor mueve el alternador, la bomba de agua de refrigeración, etc., que suponen un 7% aproximadamente del par motor, haremos **$RPID = 93\%$** (Reparto de Par Izquierda - Derecha).

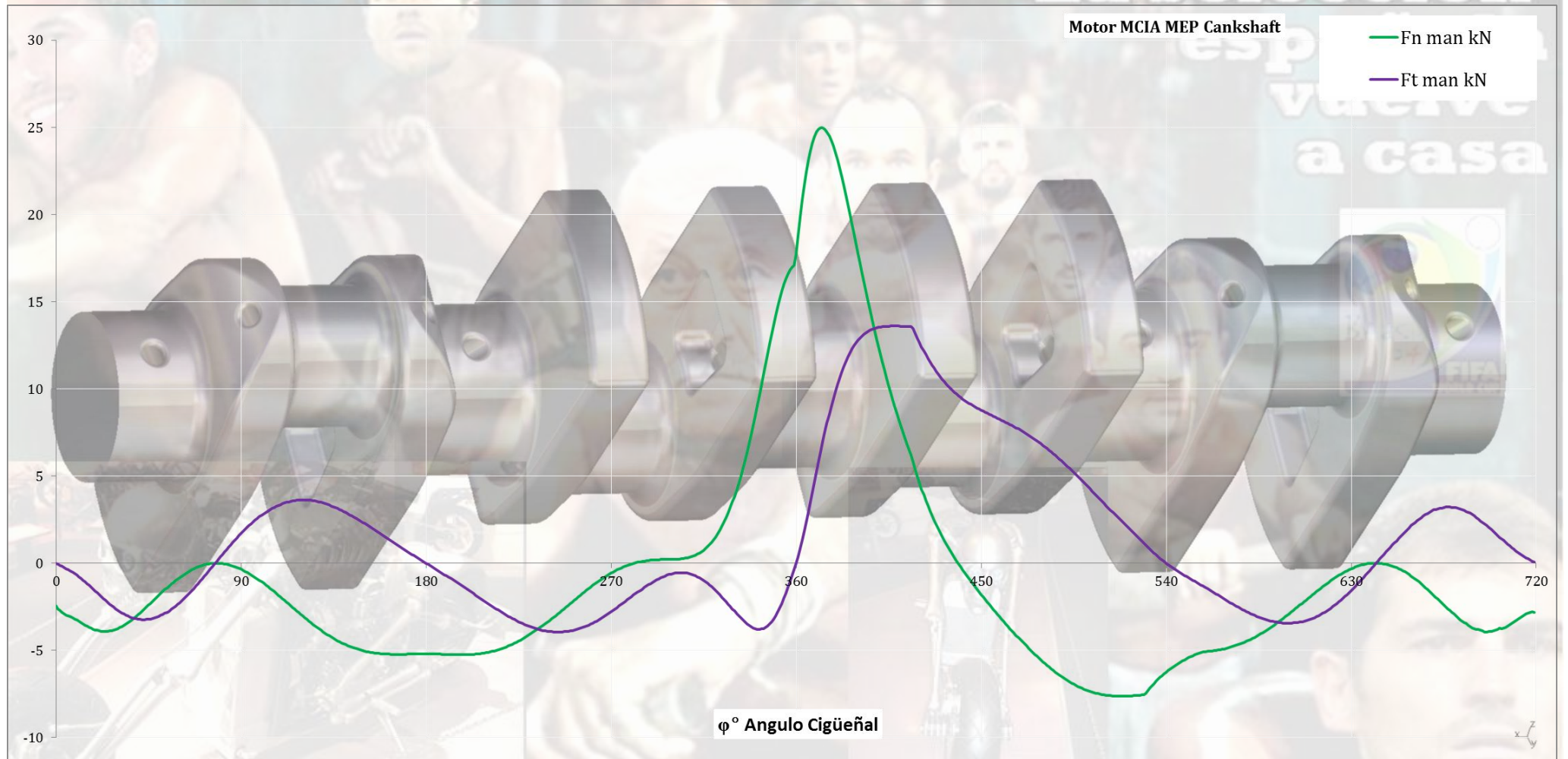


Bloqueando el cigüeñal por un lado
RPID = 0%
observamos como aumentan las tensiones en ese main journal

Haciendo el reparto de RPID = 93%
aumentan las tensiones en el main journal de la gearbox

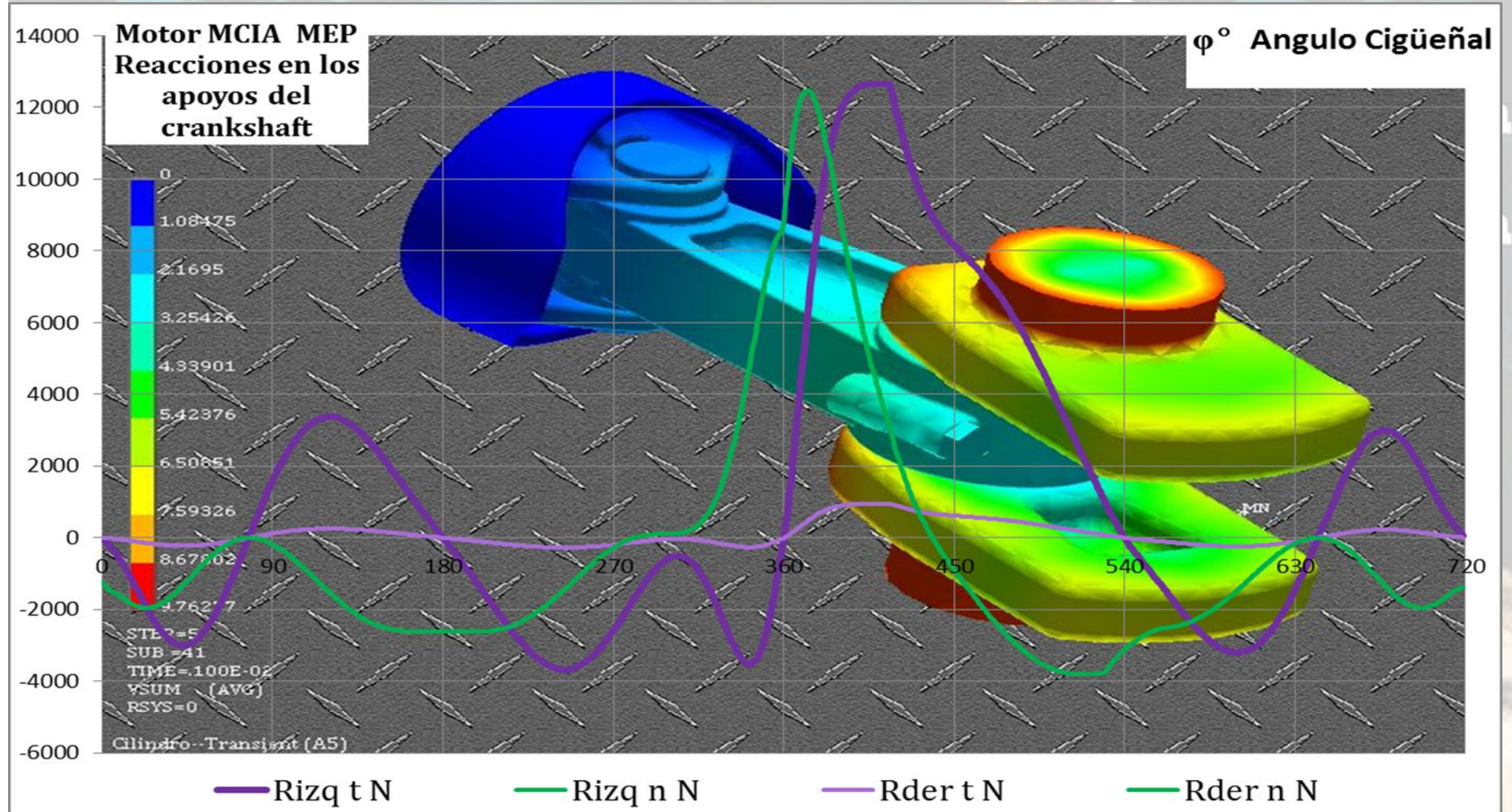
➤ En dirección normal, las fuerzas de cada biela se reparten por igual entre los dos apoyos adyacentes (por simetría).

Las fuerzas **normal** y **tangencial** de una biela actuando en la manivela del cigüeñal serán:

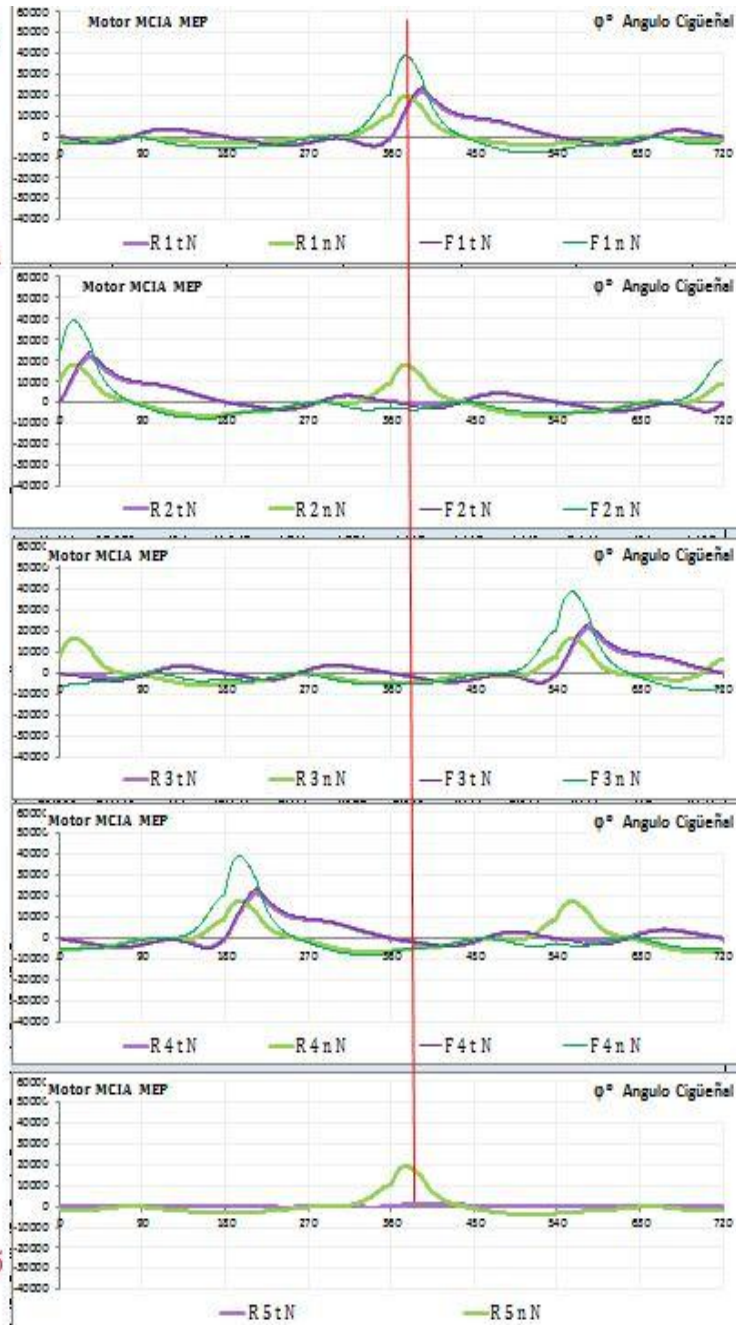


Básicamente la fuerza normal máxima y par máximo actúan en la posición de $\varphi \approx 380^\circ$ $\varphi \approx 390^\circ$ aproximadamente.

Con un reparto de par (I-D) $RPID = 93\%$ las reacciones en los apoyos, debidas a una biela, en direcciones **tangencial** y **normal**, serán:



Como cada Apoyo interior (main journals) recibe las fuerzas de las dos bielas adyacentes, habrá que sumar las reacciones de ambos, teniendo en cuenta el desfase ($d * 180^\circ$) que depende del **orden de encendido que elijamos (1-4-2-3 i.e.)**



Arriba apreciamos que en los apoyos

las **Reacciones normales son iguales** por la izquierda que por la derecha, pero

las **Reacciones tangenciales son distintas** para **Izquierda y Derecha**, debidas a **RPID = 93%**

Además las Fuerzas de las bielas están desfasadas.

Sumamos **las reacciones en los apoyos 1-2-3-4-5:**

En los Apoyos intermedios hay dos máximos en las Reacciones **normales** y uno en las **tangenciales** desfasados.

En el Apoyo 1, (*inicial en contacto con la caja de cambios*), hay un máximo (cresta) de **normales** y **tangenciales**

En el Apoyo 5, (*último, en contacto con el volante de inercias y poleas varias*) solo hay un máximo en las **normales**.

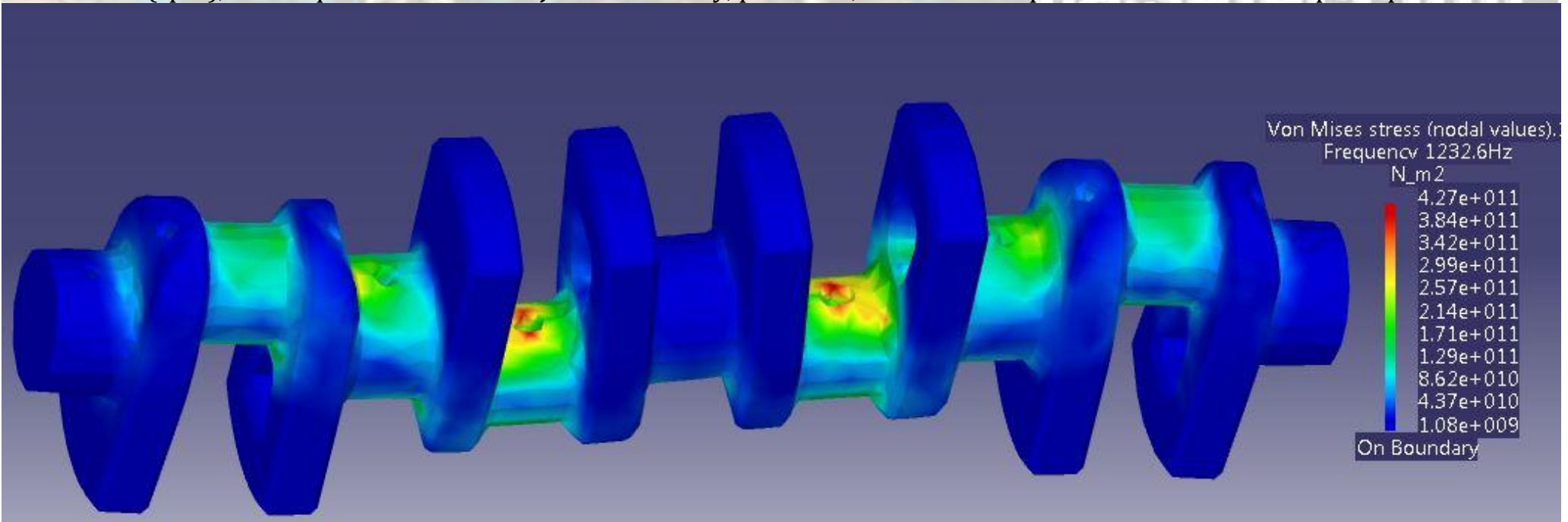
Con las fuerzas en manivelas y reacciones en los apoyos podemos hacer un **análisis armónico de vibraciones**.

Primero **el análisis modal de frecuencias libres**, luego uno **estático** para $\varphi \approx 380^\circ$ que es donde hay más máximos, luego transient, ...

Modal analysis Free Frequency

produce los máximos valores para $f = 1232 \text{ Hz} = 1232 \text{ ciclos/s} = 73920 \text{ rpm}$

A bajas revoluciones son insignificantes y son notables para el rango de $(500 - 1232) \text{ Hz} = (30000 - 73920) \text{ rpm}$, intervalo de frecuencias (rpm), en los que **no va a trabajar el motor** y, por tanto, no deberían aparecer resonancias en principio.

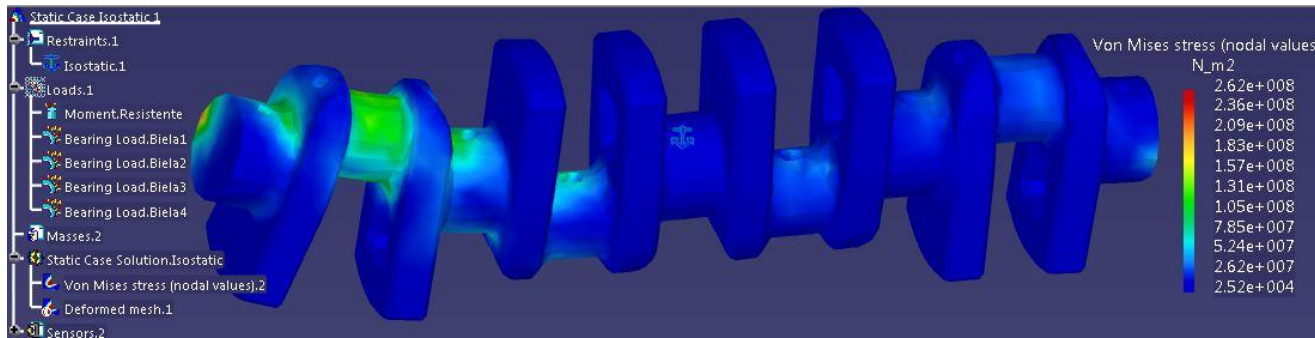


Static Analysis

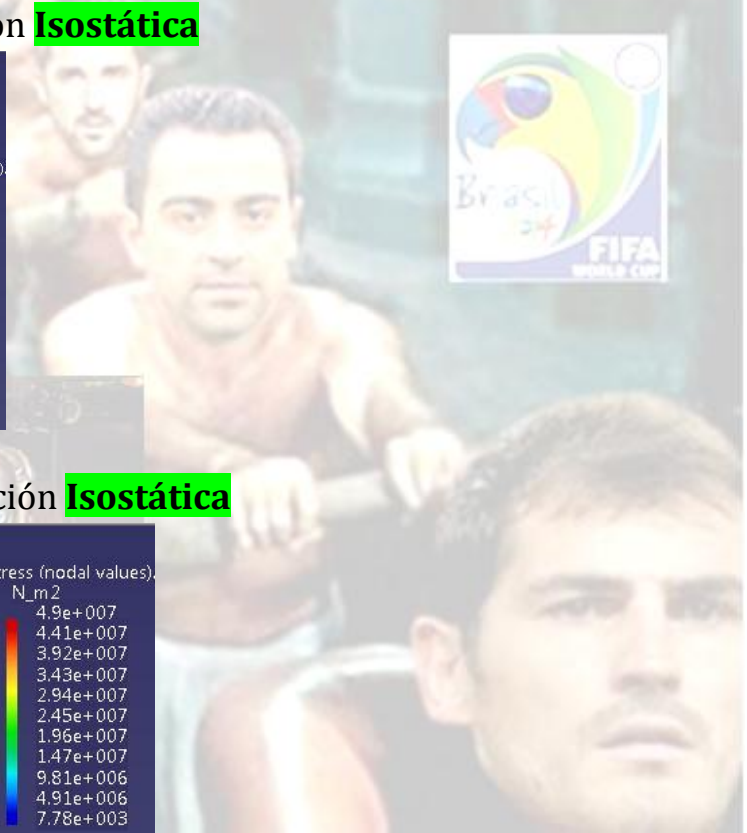
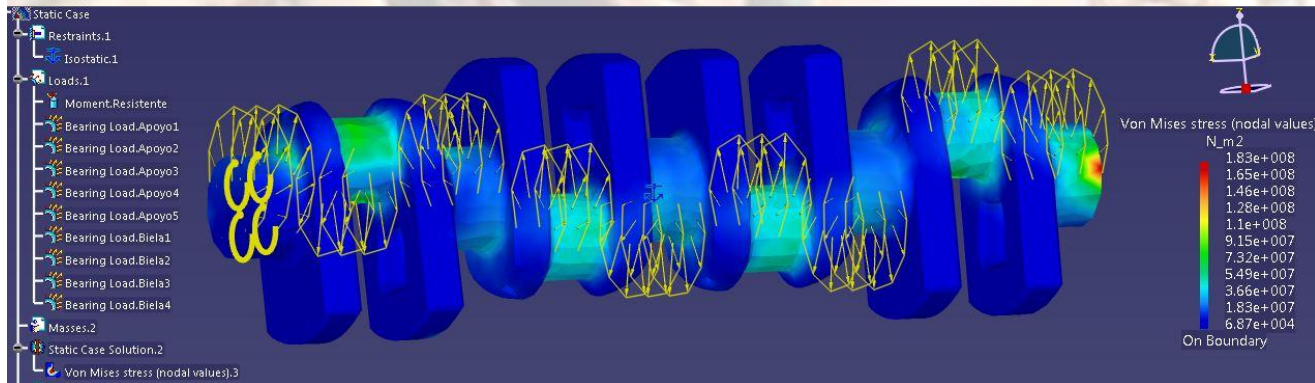
$\varphi \approx 380^\circ$, los datos a introducir, Reacciones en Apoyos y Fuerzas en manivelas del cigüeñal, son:

φ	R1t	R1n	F1t	F1n	R2t	R2n	F2t	F2n	R3t	R3n	F3t	F3n	R4t	R4n	F4t	F4n	R5t	R5n	
°	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
	Apoyo 1		Biela 1	0°	Apoyo 2		Biela 2	360°	Apoyo 3		Biela 3	540°	Apoyo 4		Biela 4	180°	Apoyo 5		
	Orden de Encendido Motor 4 cilindros 1 4 2 3																		
-1	Reacciones en los Apoyos 1-2-3-4-5 del cigüeñal del Motor de 4 cilindros y Fuerzas 1-2-3-4 de Bielas en las Manivelas																		
380	15,349	19,224	17,055	38,445	365	17,547	-1,489	-3,356	-1,962	-5,174	-2,015	-6,991	-1,949	-6,866	-1,941	-6,736	1,705	19,224	

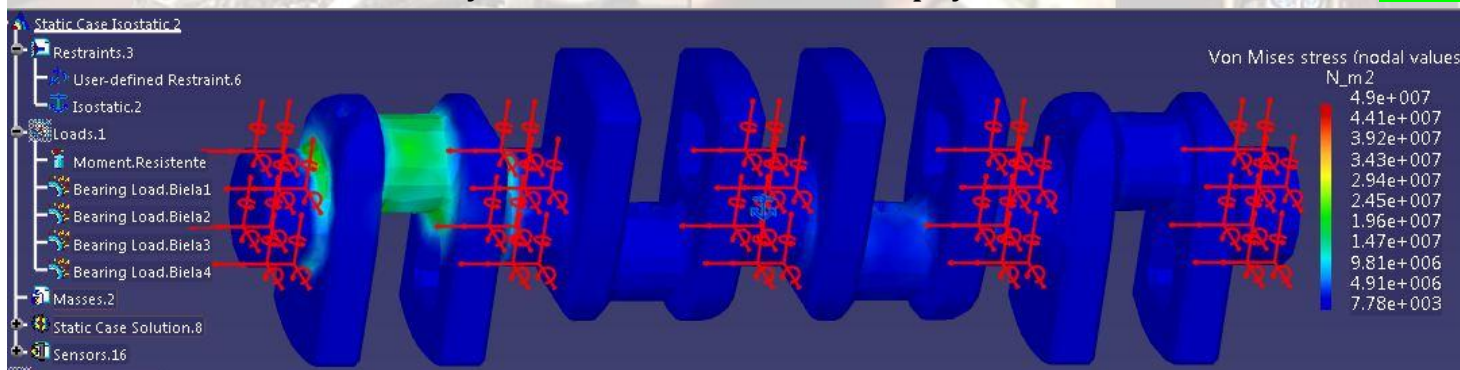
Si solo introducimos las Fuerzas de las Bielas sin **Restricciones** ni **Reacciones** en los Apoyos obtenemos la solución **Isostática**



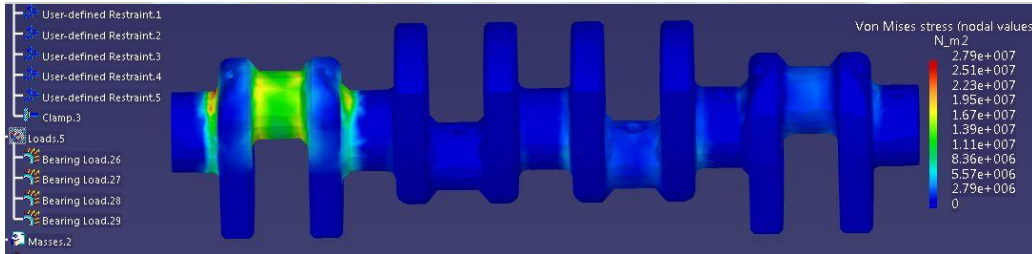
Con las Fuerzas de las Bielas y las **Reacciones** de los Apoyos obtenemos la solución **Isostática**



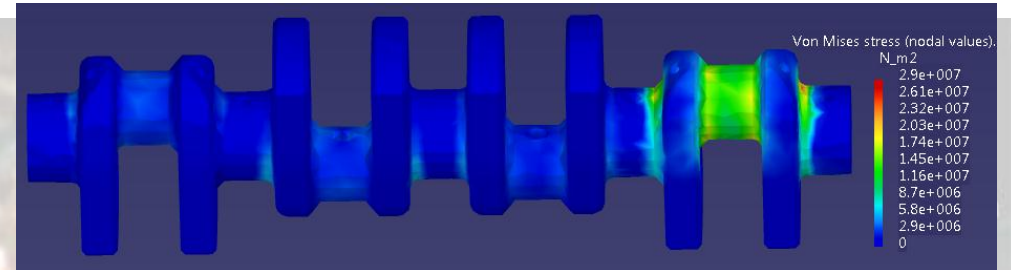
Con las Fuerzas de las Bielas y las **Restricciones** en los Apoyos obtenemos la solución **Isostática**



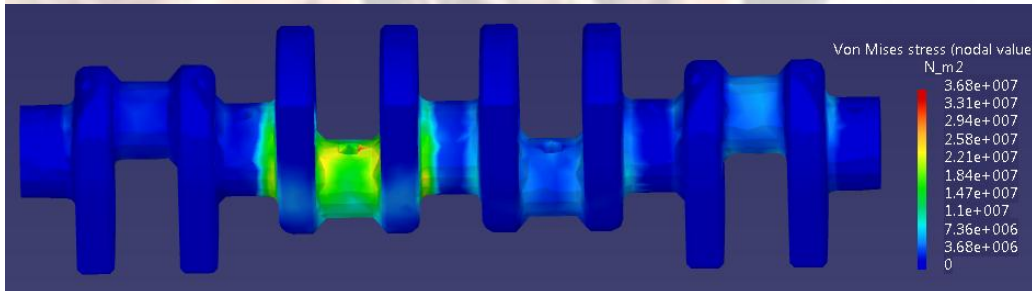
$\varphi \approx 380^\circ$ Explosión Cilindro 1



$\varphi \approx 560^\circ$ Explosión Cilindro 4



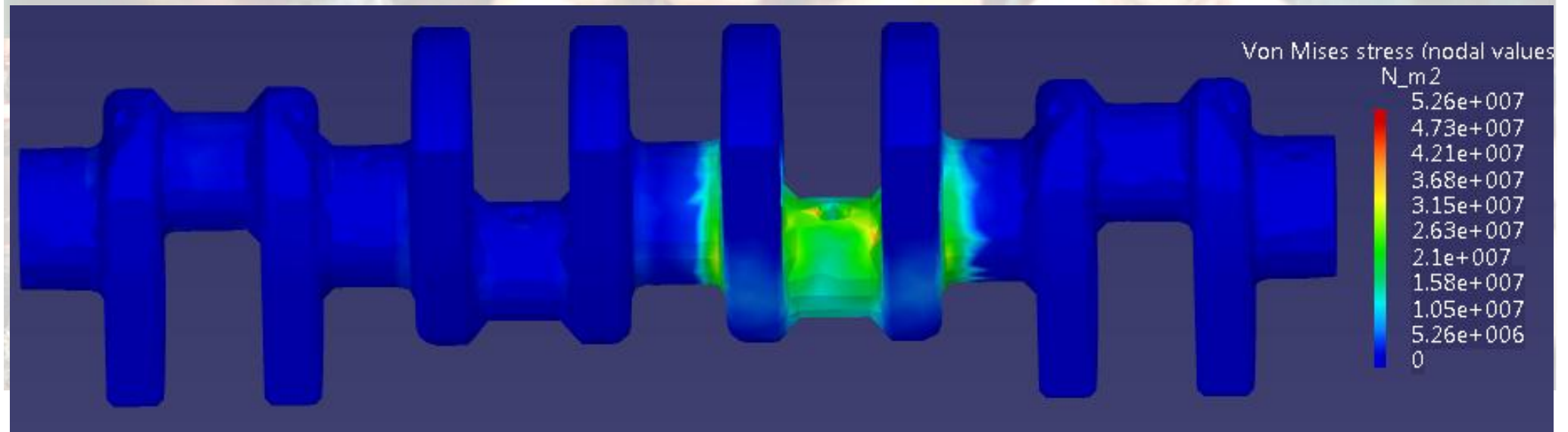
$\varphi \approx 20^\circ$ Explosión Cilindro 2



$\varphi \approx 200^\circ$ Explosión Cilindro 3

Static Analysis $\varphi \approx 380-560-20-200$

* El análisis con par resistente o sin él, produce los mismos resultados que bloquear el cigüeñal (clamp).



Harmonic analysis

Ya hemos elegido el orden de encendido de los cilindros [1-4-2-3].

El análisis hay que hacerlo para distintas revoluciones (static analysis lo hemos hecho para $n = 3000$ rpm).

Con los 4 instantes anteriores ($\varphi \approx 380^\circ - 560^\circ - 20^\circ - 200^\circ$) de las fuerzas de las bielas actuando en los **Crankpins Journals**, tenemos los datos que necesitamos para realizar el análisis armónico.

Las frecuencias de resonancia están en el intervalo de ≈ 4700 a 6400 Hz (4000 Hz = 240000 rpm)

Orden de Encendido Motor 4 cilindros 1 4 2 3
Fuerzas 1-2-3-4 de Bielas en las Manivelas

	Biela 1	0°	Biela 2	360°	Biela 3	540°	Biela 4	180°
φ	F1 t	F1 n	F2 t	F2 n	F3 t	F3 n	F4 t	F4 n
$^\circ$	N	N	N	N	N	N	N	N
380	17,063	38,465	-1,489	-3,356	-2,015	-6,992	-1,940	-6,732
560	-2,015	-6,992	-1,940	-6,732	-1,489	-3,356	17,036	38,404
20	-1,489	-3,356	17,036	38,404	-1,940	-6,732	-2,014	-6,989
200	-1,941	-6,736	-2,015	-6,992	17,063	38,465	-1,489	-3,356

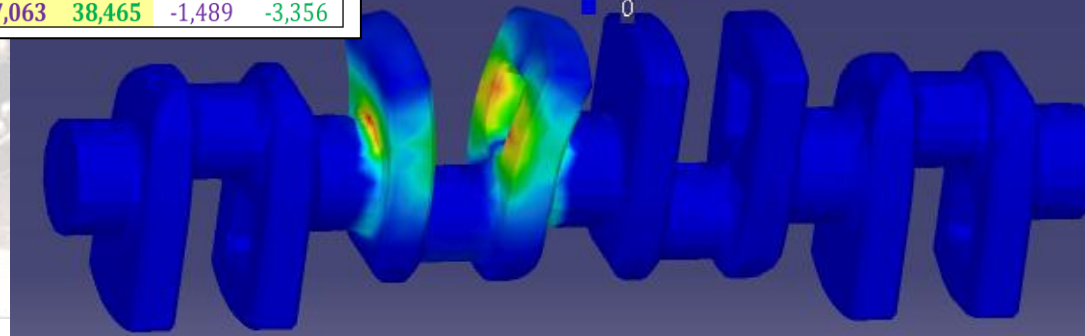
Von Mises stress (nodal values).10
Frequency 4749.51Hz
N_m2

2.42e+012
2.18e+012
1.94e+012
1.69e+012
1.45e+012
1.21e+012
9.68e+011
7.26e+011
4.84e+011
2.42e+011
0

Image Edition

Visu	Selections	Occurrences
Number of modes	Frequency (Hz)	
1	4749.51	
2	4767.86	
3	4822.9	
4	4854	
5	4871.81	
6	4873.58	
7	5088.47	
8	5146.75	
9	6384.32	
10	6405.99	

OK Cancel



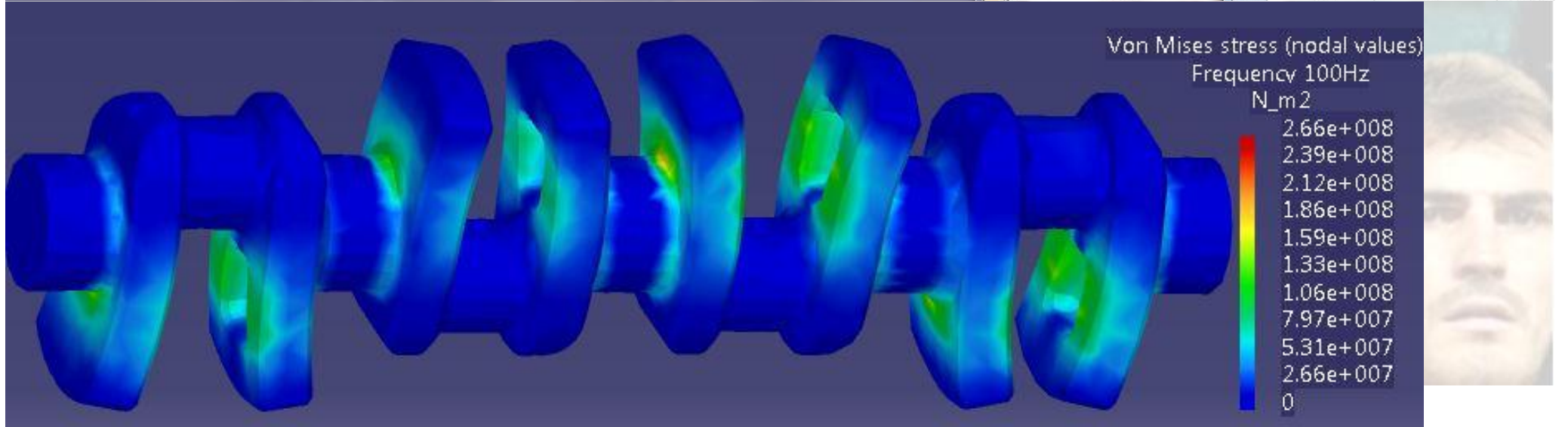
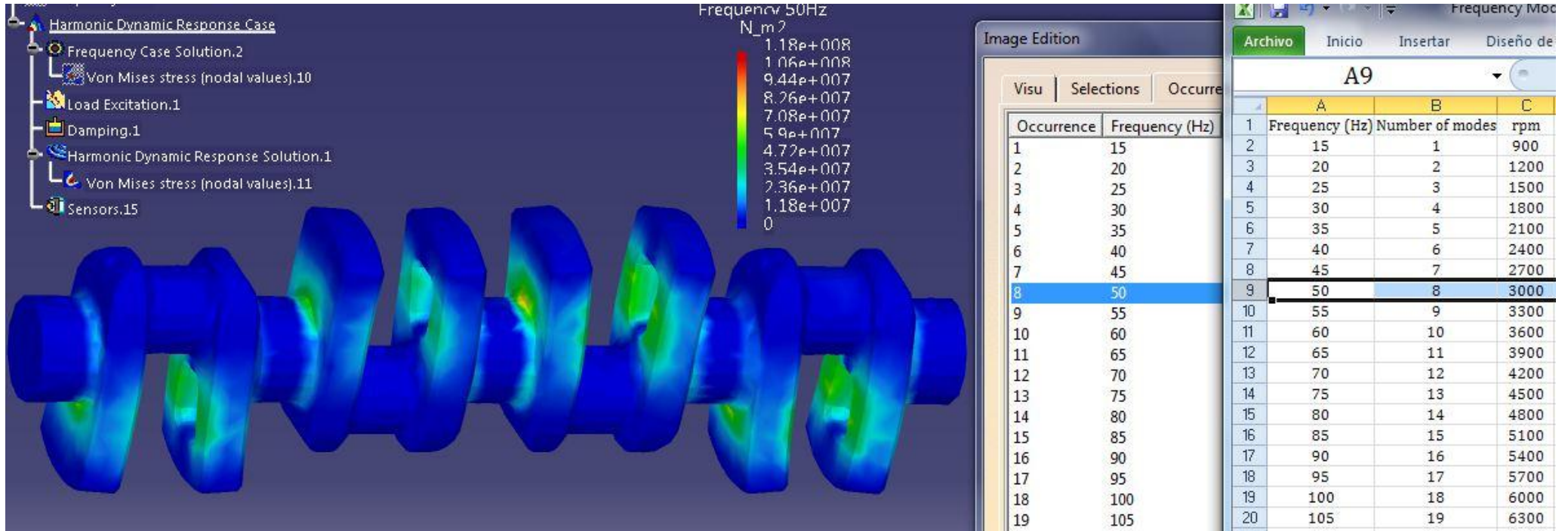
Harmonic analysis

($\varphi \approx 380^\circ - 560^\circ - 20^\circ - 200^\circ$)

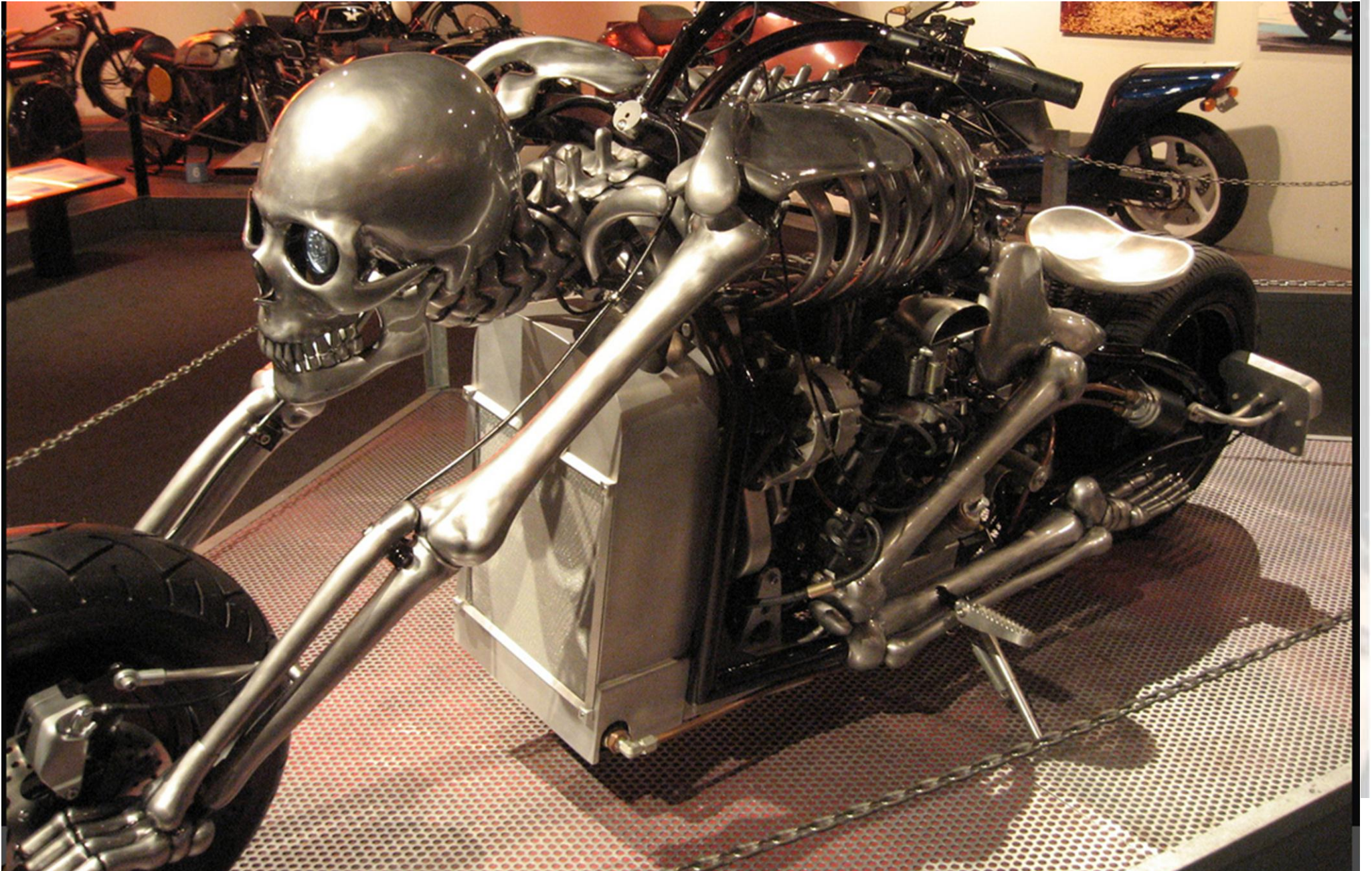
para 3000 rpm (50 Hz)

y

6000 rpm (100 Hz)



Keywords: *Design Internal Combustion Engine Piston Connecting Rod Crankshaft Stress Analysis (CAD, FEM, FEA).*



Appendix: Variable Parameter EXCEL Program

Motor 4 Cilindros Gasolina - Microsoft Excel Starter

Administrador de nombres

Nuevo... Editar... Eliminar Filtro

Nombre	Valor	Comentario	Se refiere a	Ámbito
AAA	5	Avance Apertura Admisión < 20°	=M I!\$B\$52	Libro
AAE	10	Avance Apertura Escape < 20°	=M I!\$B\$56	Libro
AE	530	Apertura Escape	=M I!\$B\$61	Libro
AEI	0	Avance Encendido e Inyección < 20°	=M I!\$B\$55	Libro
ao	0.00	Ángulo Desfase Inicial del Punto Muerto Superior	=M I!\$B\$25	Libro
ArPi	0.0079	Area Pistón	=Motor!\$B\$126	Libro
ArVa	0.0017	Area Válvulas Admisión y Escape	=Motor!\$B\$156	Libro
CA	185	Cierre Admisión	=M I!\$B\$59	Libro
Cm	7	Velocidad Media Pistón	=Motor!\$B\$136	Libro
CoCon	100%	Coefficiente de Conductividad Térmica Cilindro	=Motor!\$B\$121	Libro
CoDe	34%	Coefficiente Descarga Válvula	=Motor!\$B\$163	Libro
Contador	30	Contador	=M I!\$F\$246	Libro
Cp	0.050	Carrera Pistón	=Motor!\$B\$125	Libro
Cpa	1,005	Calor Especifico del aire a P cte a Ta	=Motor!\$B\$30	Libro
Cva	718	Calor Especifico del aire a V cte a Ta	=Motor!\$B\$32	Libro
DenAA	2770	Densidad Pistón Aluminum Alloy	=Motor!\$B\$113	Libro
DenTA	7750	Densidad Cilindro Manivela y Biela Titanium Alloy	=Motor!\$B\$117	Libro
Dp	0.100	Diaméto Pistón	=Motor!\$B\$124	Libro
EsCi	0.010	Espesor Pared Cilindro P*r/TYS	=Motor!\$B\$128	Libro
F_	0.0530	Dosado (Kg comb/kg aire)	=Motor!\$B\$82	Libro
Fcho	0.0800	Dosado 1 kmol CxHy / (X+Y/4) kmol O2	=Motor!\$B\$85	Libro
Fr	0.80	Riqueza Mezcla	=Motor!\$B\$80	Libro
Frmin	0.20	Dosado mínimo de simulación	=Motor!\$I\$80	Libro
Iteración	30	Contador de Iteración	=M I!\$F\$245	Libro
k	1.400	Coefficiente Politrópico	=Motor!\$B\$35	Libro
KconTA	15	Conductividad Cilindro Titanium Alloy	=Motor!\$B\$120	Libro
L_bi	0.115	Longitud Biela Aparente para cálculo de Esfuerzos	=Motor!\$Q\$137	Libro
Lbi	0.125	Longitud Biela	=Motor!\$B\$141	Libro
MaBi	1.810	Masa Biela	=Motor!\$B\$143	Libro

Nombre	Valor	Comentario	Se refiere a	Ámbito
macc	0.000544	kg/ciclo Consumo de Aire Total + Combustible	=Motor!\$B\$174	Libro
mafc	0.000472	kg/ciclo Consumo Aire Fresco Admisión	=Motor!\$B\$170	Libro
Mama	0.295	Masa 2 Manivelas	=Motor!\$B\$142	Libro
MaPi	0.383	Masa Pistón	=Motor!\$B\$129	Libro
mar	0.0001	kg/s Consumo de Aire Residual (Quemado)	=Motor!\$B\$177	Libro
marc	0.000047	kg/ciclo Consumo de Aire Residual (Quemado)	=Motor!\$B\$172	Libro
matc	0.000519	kg/ciclo Consumo de Aire Total (Fresco + Quemado)	=Motor!\$B\$173	Libro
mcc	0.000025	kg/ciclo Consumo Combustible	=Motor!\$B\$171	Libro
mccº	448 E-9	kg/º Consumo Combustible	=M I!\$B\$47	Libro
mci	4.974	Masa Total de mcio + contrapeso	=Motor!\$B\$149	Libro
mcic	4.146	Masa del Contrapeso	=Motor!\$B\$148	Libro
mcio	0.899	Mto. Centrifugo Inicial: Masa de (Manivela + Cabeza de la biela + 1/3 de la caña)	=Motor!\$B\$145	Libro
Mm_CxHy	114.26	Masa Molecular CxHy COMBUSTIBLE GENERICO	=Motor!\$B\$62	Libro
mpb	1.590	Mto. Alterno: Masa de (Pistón + Pie biela + 2/3 de caña)	=Motor!\$B\$144	Libro
n	4,000	Velocidad Angular (Crankshaft rotational speed must not exceed 18,000rpm)	=Motor!\$B\$112	Libro
Nc	4	Nº de Cilindros	=Motor!\$B\$105	Libro
no	1000	Revoluciones iniciales	=M I!\$A\$105	Libro
nºgi	57	Grados de Inyección	=M I!\$B\$46	Libro
Pa	111,468	Presión Admisión	=Motor!\$B\$26	Libro
Pcg	47.2 E+6	Calor de Combustión del Combustible CxHy	=Motor!\$B\$98	Libro
Piny	50 E+6	Presión Inyector < 200 E+6	=M I!\$B\$42	Libro
Pme	98,477	Presión Media de Escape	=M I!\$B\$731	Libro
Po	101,325	Presión de Ambiente	=Motor!\$B\$5	Libro
R_	287.0	Constante para el Aire	=Motor!\$B\$29	Libro
Rc_	10	Relación de Compresión	=Motor!\$B\$111	Libro
RCA	5	Retraso Cierre Admisión < 20º	=M I!\$B\$54	Libro
RCE	5	Retraso Cierre Escape < 20º	=M I!\$B\$53	Libro
RDC	2.00	Relación Diámetro/carrera	=Motor!\$B\$109	Libro
ri	-0.003	Distancia del centro de gravedad de mci al eje de giro	=Motor!\$B\$150	Libro
ric	-0.030	Contrapeso: Distancia (sentido opuesto) del centro de gravedad al eje de giro	=Motor!\$B\$147	Libro
rio	0.173	Distancia del centro de gravedad de mcio al eje de giro	=Motor!\$B\$146	Libro
Rma	0.025	Radio Manivela (a cigüeñal)	=Motor!\$B\$140	Libro
RPID	93%	Reparto Par Izq / Der	=M I!\$FI\$7	Libro
Rtg	33%	$Rtg = (P_{tur} - P_0) / (P_{gas} - P_0)$	=Motor!\$B\$8	Libro

ción
ñola
elve
casa



Nombre	Valor	Comentario	Se refiere a	Ámbito
Rvc	1.00	Relación Volumétrica $Rvc = Vco / Vd$	=Motor!\$B\$19	Libro
Ta	303	Temperatura Admisión	=Motor!\$B\$25	Libro
ti ^o	56 E-6	Tiempo de giro de 1 ^o del motor	=M I!\$B\$45	Libro
To	300	Temperatura Ambiente	=Motor!\$B\$4	Libro
Tref	390	Temperatura Líquido Refrigeración	=Motor!\$B\$244	Libro
TYSAA	280 E+6	Tensile Yield Strength Pistón Aluminum Alloy	=Motor!\$B\$115	Libro
TYSTA	207 E+6	Tensile Yield Strength Cilindro Titanium Alloy	=Motor!\$B\$119	Libro
Vcc	0.000044	Volumen Cámara de Combustión	=Motor!\$B\$130	Libro
Vd	0.000393	Cilindrada Unitaria (de 1 cilindro)	=Motor!\$B\$123	Libro
VdT	0.00157	Cilindrada (Engine capacity must not exceed 2400cc)	=Motor!\$B\$106	Libro
Vtc	0.000436	Volumen total de cilindro	=Motor!\$B\$131	Libro
wcc	33	ciclo/s Velocidad Angular ciclo completo	=Motor!\$B\$133	Libro
wcr	419	rd/s Velocidad Angular	=Motor!\$B\$134	Libro
Wefec	62,318	Potencia Efectiva	=Motor!\$B\$272	Libro
Wturbo	-21	ΔW_{turbo}	=M I!\$B\$4	Libro
x	8.00	Atomos de Carbono del Combustible (x=8 gasolina x= 13 Gasoil)	=Motor!\$B\$60	Libro
Xd	0.000	Distancia Horizontal Máxima Pistón/Eje Cigüeñal MD	=M I!\$B\$24	Libro
y	18.00	Atomos de Hidrógeno del Combustible (y=18 gasolina y= 28 Gasoil)	=Motor!\$B\$61	Libro
Yd	0.000	Desplazamiento Vertical Eje Cilindro/Eje Cigüeñal "Motor Desplazado"	=M I!\$B\$23	Libro
γ	1.400	Coefficiente Adiabático Cpa/Cva	=Motor!\$B\$34	Libro
ΔFr	0.15	Incremento Dosado de simulación	=Motor!\$I\$81	Libro
ΔHf_CO2	397,765	J/mol Calor de Combustión/Formación del CO2	=Motor!\$G\$72	Libro
ΔHf_H2O	254,220	J/mol Calor de Combustión/Formación del H2O	=Motor!\$G\$73	Libro
Δn	1000	Incremento de Revoluciones	=M I!\$B\$105	Libro
η_{vol}	94%	Rendimiento Volumetrico	=Motor!\$B\$168	Libro
λ	0.20	Relación Rma/Lbi (Rango 0,2 - 0,5 Aceptable)	=Motor!\$B\$139	Libro
μ_a	19 E-6	Viscosidad dinámica del aire	=Motor!\$B\$27	Libro
μ_{roz}	0.10	μ_{roz}	=M I!\$FA\$8	Libro
ξ	0.456	Ratio Distancia del Centro de Masas de Biela/Longitud Biela $\xi = \ell / L_{bi}$	=Motor!\$G\$141	Libro
$\xi_{_}$	0.278	Ratio Aparente Distancia del Centro de Masas de Biela/Longitud Biela $\xi' = \ell' / L'_{bi}$	=Motor!\$Q\$139	Libro
ρ_a	1.283	Densidad del Aire a P=1 atm y 25 °C	=Motor!\$B\$21	Libro
ρ_g	740	Densidad del Combustible CxHy	=Motor!\$B\$63	Libro
ρ_o	1.177	Densidad del Aire a P=1 atm y 25 °C	=Motor!\$B\$6	Libro
ψ_{ic}	50%	Eficiencia Intercooler Compresor	=Motor!\$B\$24	Libro
ψ_{itc}	50%	Eficiencia Intercooler Turbo	=Motor!\$B\$14	Libro

ción
ñola
el ve
casa

